חשבון דיפרנציאלי

הנגזרת של הפונקציה הפולינים

מאת: גיא קורן

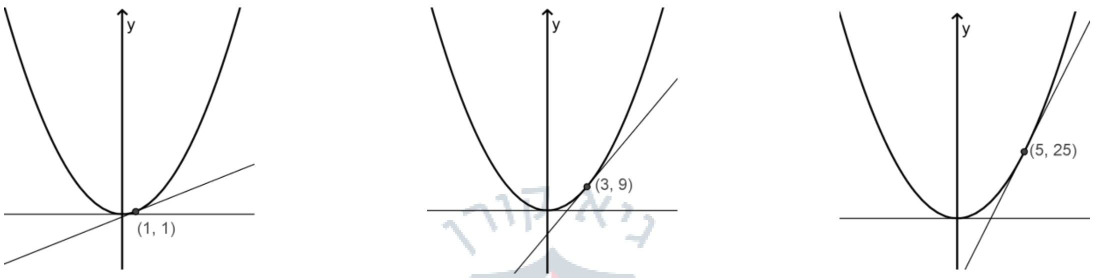
2/15/2014

הגדרת הנגזרת

מלבד פונקציה קווית, שבה השיפוע קבוע בכל נקודה על הפונקציה, בשאר הפונקציות שיפוע המשיק לפונקציה משתנה מנקודה לנקודה (ראו איור1) . כדי לתאר את ההתנהגות של פונקציה לא קווית, נצטרך להבין את גודל השינוי שלה מנקודה לנקודה. הראשונים שפיתחו מודל מתמטי לשיפוע הפונקציה בכל נקודה היו ניוטון ולייביץ. מודל זה נקרא **הנגזרת של הפונקציה (הוכחה בנספחים)**. שהיא למעשה פונקציה הנגזרת מתוך הפונקציה עצמה, והיא נותנת לנו את השיפוע לפי שיעור ה-x בכל נקודה. אנו משתמשים בטכניקה, שמתקבלת ע"י המודל.

הסבר התוצאות

לפי המודל של ניוטון וליבניץ ***שיפוע המשיק בכל נקודה שווה לערך פונקצית הנגזרת***



איור 1. ניתן לראות שבכל נקודה שיפוע המשיק לפונקציה f(x)=x^2 שונה

מתוך המודל (ראו נספח) נקבל שפונקצית הנגזרת של פולינום היא: $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

לכן נקבל שהנגזרת של הפונקציה $\underline{f(x) = x^2}$ **היא** $\underline{f'(x) = 2x}$

כעת נציב מספר נקודות בפונקצית הנגזרת:

כאשר נציב בפונקצית הנגזרת x=1 , נקבל $m = f'(1) = 2\cdot 1 = 2$

כאשר נציב בפונקצית הנגזרת x=2 ,נקבל $m = f'(x) = 2\cdot 2 = 4$

כאשר נציב בפונקצית הנגזרת x= 0 ,נקבל $m = f'(0) = 2\cdot 0 = 0$

כאשר נציב בפונקצית הנגזרת x=-1 ,נקבל $m = f'(-1) = 2\cdot -1 = -2$

ניתן ע"פ התוצאות לראות שכאשר נציב שיעור x גדול יותר ערך הנגזרת יהיה גדול יותר ולכן השיפוע של המשיק לפונקציה גדל כמתואר באיור 1, וכאשר נציב מספרים שקטנים מ-0 ערך הנגזרת יהיה שלילי יותר (גרף תלול יותר למטה) . וכמובן כאשר נציב 0 נוכל לומר שהשיפוע שווה לאפס כמו שנראה.

ערך פונקצית ***הנגזרת*** (בנקודה) = ***לשיפוע*** המשיק בנקודה

להלן תוצאות המודל לפונקציות הפולינום, פונקציה רציונאלית ופונקצית שורש:

<u>נגזרות מיידיות</u>

סוג	דוגמא	נוסחא
נגזרת פונקצית הפולינום	$(x^4)' = 4 \cdot x^3$	$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n \cdot x^{n-1}}$
נגזרת קו ישר	$(-\frac{1}{3}x)' = -\frac{1}{3}$	$(\boldsymbol{ax})' = \boldsymbol{a}$
נגזרת פונקציה קבועה	$(-55)' = 0$	$(\boldsymbol{a})' = \boldsymbol{0}$
נגזרת מורכבת	דוגמא בהמשך	$(\boldsymbol{f(g)})' = \boldsymbol{f'(g) \cdot g'}$
נגזרת מכפלת שתי פונקציות	דוגמא בהמשך	$(\boldsymbol{f \cdot g})' = \boldsymbol{f' \cdot g + f \cdot g}$

דוגמאות לנגזרת מורכבת ומכפלה

נגזרת מורכבת	$\boldsymbol{f(x) = (1-4x)^5}$ $f'(x) = \boldsymbol{5(1-4x)^4 \cdot (-4)}$
נגזרת מכפלה	$\boldsymbol{f(x) = x \cdot (x-2)^2}$ $f'(x) = 1 \cdot (x-2)^2 + x \cdot 2(x-2) \cdot 1$ $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

הסבר פתרון תרגילים נפוצים

1. **מציאת נקודת השקה אם נתון השיפוע:** משווים את הנגזרת של הפונקציה לשיפוע
2. **מציאת שיפוע המשיק אם נתונה נקודה:** גוזרים ומציבים בנגזרת את שיעור ה-X של הנקודה.
3. **מציאת פרמטר אם נתונים, נקודה ושיפוע:** מציבים את שיעור ה-X בנגזרת, ומשווים לשיפוע
4. **מציאת משוואת משיק אם יש נקודה:** **א.** מציבים בפונקציה את שיעור ה-x, כדי לקבל את ה-y **ב.** מציבים את ה-X בנגזרת, כדי לקבל את השיפוע. ואז מוצאים את המשוואה ע"פ הנוסחא
5. **מציאת פרמטר אם יש נקודה (שיעור x וגם y):** מציבים את שיעור ה-x בפונקציה ומשווים ל-y
6. *** כאשר נתונה נקודה שהיא לא נקודת השקה:** נשתמש בנקודה יצוגית (דוגמא בהמשך)

דוגמאות לכל אחת מהאפשרויות ניתנות בהמשך

דרך פתרון תרגילים

לאחר קריאת השאלה, רשמו את הפרטים הבאים אם הם נתונים

- פונקציה
- הנגזרת (אם יש שתי פונקציות אז לגזור את שתיהן)
- שיפוע
- שיעור ה- x
- שיעור ה- y

בכל שאלה חייבים לתת שיפוע או נקודה, לא תמיד זה ברור אך צריך להבין מתוך השאלה לפי:

- ישרים מאונכים (ניצבים) – שיפוע הופכי ונגדי ($M_1 \cdot M_2 = -1$)
- ישרים מקבילים – שיפועים שווים.
- נקודת השקה – שיפועים זהים, וערכי y זהים
- נקודות קיצון פנימיות **שיפוע המשיק הוא אפס** ולכן ערך הנגזרת שווה לאפס.
- נקודות פיתול- יש נקודות פיתול (לא כולן) ששיפוע המשיק לפונקציה שווה לאפס.
- ישר המקביל לציר ה- x מאונך (ניצב) לציר ה- y **שיפוע אפס**
- משוואת ישר $\boldsymbol{y = m \cdot x + n}$ m- שיפוע הישר אין צורך לגזור

הוכחת נקודת השקה.

נוכיח ששיפוע המשיק בנקודת ההשקה זהה **וגם** ערך ה-y זהה.

נציב בנגזרות את שיעור ה- x ונראה שהשיפוע יוצא זהה

נציב בפונקציה את שיעור ה-x ונראה שערך ה-y זהה.

דוגמאות תרגילים פתורים

1. **מציאת נקודת השקה אם נתון השיפוע:** משווים את הנגזרת של הפונקציה לשיפוע

תרגיל מס' 1 : מצאו את נקודות שבהן שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = x^3 - 2$ הוא 3

פתרון:	נתונים:
נשווה את הנגזרת לשיפוע המשיק $f'(x) = 3$ $3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1$ נקבל את הפתרונות : $x_1 = 1,\ x_2 = -1$ נציב בפונקציה ונקבל: $(1,-1),\ (-1,-3)$	$f(x) = x^3 - 2$ $f'(x) = 3x^2$ $m = 3$ $x = ?$

2. **מציאת שיפוע המשיק אם נתונה נקודה:** גוזרים ומציבים בנגזרת את שיעור ה-X של הנקודה.

תרגיל מס' 2 : **מצאו את השיפוע המשיק לפונקציה,** $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 4x$ **בנקודה שבה** x=-2

פתרון:	נתונים:
נציב בנגזרת את שיעור ה-x ונקבל את השיפוע $f'(-2) = m$ $f'(-2) = -(-2)^2 - 4 = -8$ השיפוע של המישק בנקודה הוא -8	$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 4x$ $g(x) = -x^2 - 4$ $m = ?$ $x = -2$

3. **מציאת פרמטר אם נתונים, נקודה ושיפוע:** מציבים את שיעור ה-x בנגזרת, ומשווים לשיפוע

תרגיל מס' 3 : **מצאו את הפרמטר** b, $h(x) = -bx^4 + 4x$ אם ידוע שמשיק לפונקציה **בנקודה שבה** $x = 1$
מקביל לישר $y - -2x + 3$

פתרון:	נתונים:
נציב בנגזרת את שיעור ה-x ונשווה לשיפוע $f'(1) = -2$ $-2 = -4b \cdot 1^3 + 4 \rightarrow -4b = -6$ ערך הפרמטר b הוא 1.5	$h(x) = -bx^4 + 4x$ $h(x) = -4bx^3 + 4$ $m = -2$ $x = 1$ השיפוע הוא הוא **-2** , כיוון, שהמשיק לפונקציה מקביל לישר הנתון ולכן השיפועים שווים.

4. <u>מציאת משוואת משיק אם יש נקודה:</u> א. מציבים בפונקציה את שיעור ה-x, כדי לקבל את ה-y
ב. מציבים את ה-X בנגזרת, כדי לקבל את השיפוע. ואז מוצאים את המשוואה ע״פ הנוסחא

<u>תרגיל מס׳ 4 :</u> מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $\boldsymbol{r(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x^3} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x^2 + 1\frac{5}{6}$ בנקודה שבה $x = -1$

פתרון:	נתונים:
תחילה נציב את שיעור ה- x בפונקצית הנגזרת על מנת לקבל את השיפוע, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r'}(-\mathbf{1}) = -(-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - 1 = -2$ <u>שיפוע המשיק הוא 2-</u> **כעת נציב את שיעור ה- x בפונקציה על מנת לקבל את שיעור ה-y של הנקודה** $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}(-\mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(-\mathbf{1})^3 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(-1)^2 + 1\frac{5}{6} = 1 \rightarrow (-1,1)$ **על מנת למצוא את משוואת הישר נציב ב-** $\boldsymbol{y = m \cdot x + b}$ $\boldsymbol{y = -2 \cdot x + b}$ **כעת נציב את הנקודה** $\boldsymbol{1 = -2 \cdot (-1) + b}$ **ונקבל ש b הוא** $\boldsymbol{b = -1}$ **ולכן נקבל :** $\underline{\boldsymbol{y = -2 \cdot x - 1}}$	$\boldsymbol{r(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x^3} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x^2 + 1\frac{5}{6}$ $\boldsymbol{r'(x) = x^2} - x$ $\boldsymbol{m} = ?$ $\boldsymbol{x = -1}$ $\boldsymbol{y} = ?$

5. <u>מציאת פרמטר אם יש נקודה (שיעור x וגם y):</u> מציבים את שיעור ה-x בפונקציה ומשווים ל-y

<u>תרגיל מס׳ 5 :</u> מצאו את הפרמטר d, אם ידוע שמשוואת המשיק לפונקציה $\boldsymbol{y = 2x^2 - 9}x + d$, היא $y = -x - 3$

פתרון:	נתונים:
תחילה נשווה את פונקצית הנגזרת לשיפוע המשיק על מנת לקבל את שיעור ה-x של נקודת ההשקה: $\boldsymbol{y' = -1}$ $\boldsymbol{-1 = 4x - 9} \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$ על מנת למצוא את הפרמטר d נצטרך למצוא את שיעור ה-y של נקודת ההשקה. מכיוון שכאשר שאנו גוזרים הפרמטר d הוא ״נעלם״, נציב את שיעור ה-x שמצאנו במשוואת המשיק (שגם הוא עובר בנקודת ההשקה) ונקבל $\boldsymbol{y(2) = -2 - 3 = -5}$ לכן נקודת ההשקה היא : $(\mathbf{2}, -\mathbf{5})$ (אם ההינו מנסים למצוא את שיעור ה-y דרך הפונקציה ההינו נתקלים בביטוי שכלול את d) כעת כל מה שנותר זה להציב, בו זמנית את שיעור ה-x וה-y בפונקציה : $\boldsymbol{-5 = 2 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + d}$ מתוך המשוואה נחלץ את d ונקבל $\boldsymbol{d = 5}$	$\boldsymbol{y = 2x^2 - 9}x + d$ $\boldsymbol{y' = 4x - 9}$ $\boldsymbol{m = -1}$ $\boldsymbol{x} = ?$ $\boldsymbol{y} = ?$

6. * <u>כאשר נתונה נקודה שהיא לא נקודת השקה:</u> נשתמש בנקודה ייצוגית

<u>תרגיל מס׳ 6 :</u> מצאו את משוואת המשיק לפונקציה, $f(x) = x^2 - 6x$ אם ידוע שמשיק עובר דרך הנקודה (-3,2) כאשר ידוע ששיעור ה- x של נקודת ההשקה חיובי

פתרון:

תחילה נגדיר את הנקודת ההשקה כנקודה ייצוגית ע״י הפונקציה : $\left(t, t^2 - 6t\right)$. כעת את שיפועה משיק נחשב בשני דרכים ואז נשווה את התושאות נקבל משוואה ש- t הוא הנעלה היחיד בה.

דרך ראשונה (בנגזרת) : $m = f'(t) = \mathbf{2t - 6}$

דרך שנייה (לפי נוסחא): $m = \dfrac{\mathbf{t^2 - 6t - 2}}{\mathbf{t + 3}}$

נשווה את שני הביטוים שקיבלנו :

$$2t - 6 = \frac{\mathbf{t^2 - 6t - 2}}{\mathbf{t + 3}}$$

$$2t^2 - 18 = \mathbf{t^2 - 6t - 2}$$

$$t^2 + 6t - 16 = 0$$

הפתרונות המתקבלים הם : $t_1 = 2\ ,\ t_2 = -8$

לכן יש שני משיקים לפונקציה העוברים בנקודה (-3,2).
אנו נמצא את השיפוע של המשיק העובר בנקודה ששיעור ה-x של הוא 2 מכיוון שנתון ששיעור ה-x של נקודות ההשקה הוא חיובי. את השיפוע נמצע ע״י הצבה של שיעור ה-x, שקיבלנו, בנגזרת של הפונקציה .

$$m_1 = f'(2) = \mathbf{2 \cdot 2 - 6 = -2}$$

נקבל האת שיעור ה-**y** של הנקודה ע״י הצבה בפונקציה

$$\boldsymbol{y = f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 = -8}$$

כעת נמצא את משוואת המשיק : $m_1 = -2$ $(2, -8)$

$$y = m \cdot x + b$$

$$-8 = -2 \cdot 2 + b$$

$$b = -4$$

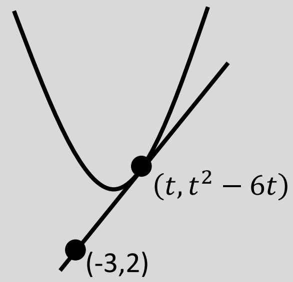
לכן נקבל שמשוואת המשיק לפונקציה היא :

$$\boldsymbol{y = -2x - 4}$$

נתונים:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x - 6}$$



7. <u>מקרה מיוחד!</u>

<u>תרגיל מסי 7 :</u> נתונה הפונקציה, $\boldsymbol{f(x) = ax^3} + 3x^2$ מצאו את הפרמטר $\boldsymbol{a}$ $(a > 1)$ אם ידוע ששיעור ה-y בנקודה שבה שיפוע המשיק הוא אפס, הוא 1 ושיעור ה- x בנקודה זו שונה מאפס

פתרון:	**נתונים:**
תחילה נגסה למצוא את שיעור ה-x של נקודה שבה השיפוע של המשיק לפונקציה הוא אפס, ולכן נשווה את הנגזרת לאפס. $\boldsymbol{2ax^2 + 6x = 0}$ נוציא גורם משותף $\boldsymbol{2x(ax + 2) = 0}$ פתרונות המשוואה הם : $\boldsymbol{x=0}$ ו- $\boldsymbol{x = -\frac{2}{a}}$ כעת אנו יודעים שהנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס, היא $\left(-\frac{2}{a}, -5\right)$ נציב את הנקודה (גם שיעור ה-x וגם שיעור ה-y) בפונקציה : $\boldsymbol{1 = a(-\frac{2}{a})^3} + 3(-\boldsymbol{\frac{2}{a}})^2$ $\boldsymbol{1 = a(-\frac{8}{a^3})} + 3(\boldsymbol{\frac{4}{a^2}})$ $\boldsymbol{1 = -\frac{8}{a^2} + \frac{12}{a^2}}$ $\boldsymbol{1 = \frac{4}{a^2}} \rightarrow \boldsymbol{a^2 = 4} \rightarrow \boldsymbol{a = \mp 2}$ **לכן נקבל שגודלו של הפרמטר הוא** $\boldsymbol{a=2}$	הפונקציה: $\boldsymbol{f(x) = ax^3} + 3x^2$ פונקצית הנגזרת: $\boldsymbol{f'(x) = 2ax^2 + 6x}$

חקירת פונקציה

כאשר נידרש **<u>לחקור פונקציה</u>**, עלינו לבדוק את הסעיפים הבאים המאפשרים לתאר את התנהגות הפונקציה

א. **תחום ההגדרה של הפונקציה: עבור אילו ערכי X הפונקציה מוגדרת?**
כאשר יש X **<u>במכנה</u>** אז : $x \neq 0$ (סיבה- אסור לחלק באפס), כאשר יש X מתחת ל**<u>שורש</u>** : $x \geq 0$ (סיבה – לא ניתן להוציא שורש ממספר שלילי)

ב. **חיתוך הפונקציה עם הצירים (ציר ה-X וציר ה-Y):**
<u>עם ציר ה-X</u> – מציבים בפונקציה y=0. ה-X, שמתקבל הוא שיעור ה-X של נקודת המפגש של הפונקציה עם ציר ה-X.
<u>עם ציר ה-Y</u> – מציבים בפונקציה x=0 . ה-Y, שמתקבל הוא שיעור ה-Y של נקודת המפגש של הפונקציה עם ציר ה-Y.

ג. **נקודות קיצון (מינימום מקסימום):** <u>גוזרים</u> את הפונקציה, <u>משווים</u> את הנגזרת לאפס ומתקבל שיעור ה-X של נקודת הקיצון. לאחר מכן <u>מציבים את שיעור ה-X בפונקציה</u> כדי לקבל את ה-Y של נקודת הקיצון (שכמובן נמצאת על הפונקציה!).

ד. **תחומי עלייה וירידה:** מציבים בנגזרת שמצאנו בסעיף הקודם את שיעורי ה – X של נקודות שנמצאות בין הנקודות החשודו <u>ובודקים את הסימן שיוצא</u>, שיטת הנחש או בעזרת טבלה. (ראה עמודים: 64, 66, 68)

ה. **אסימפטוטות:** <u>אסימפטוטה אנכית: לרוב אפשר להבין לפי תחום ההגדרה, אופקית (תוסבר בהמשך)</u>

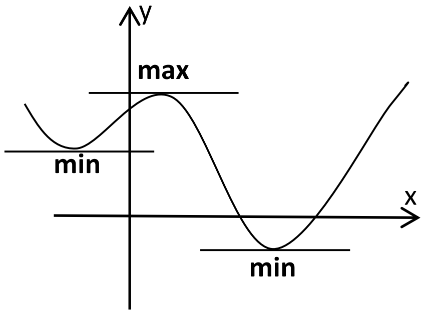
ו. **שרטוט:** לפי מה הנתונים שמצאנו בסעיפים הקודמים, מסמנים את כל הנקודות במערכת צירים ריקה שמכינים מראש, ומחברים לעקומה.

*כאשר בבדיקה של העלייה והירידה של הפונקציה יוצא שיש עלייה או ירידה בשני תחומים ברצף – **זוהי נקודת פיתול**
*בחקירת פונקציה בתחום סגור יש לבדוק גם את ערך הפונקציה בקצוות הקטע ואז לקבוע מינימום ומקסימום מוחלטים.

''אני תמיד עושה את מה שאני לא יודע לעשות כדי שאני אלמד לעשות אותו"-פאבלו פיקאסו

נקודות קיצון

נקודות קיצון (מינימום ומקסימום) הן נקודות שבהן **שיפוע המשיק** לפונקציה מקביל לציר ה-X, ולכן הוא **אפס.** וכמו שהוסבר בעמוד הקודם, שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שווה לערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה, לכן אנו משווים את הנגזרת לאפס. נקבל משוואה אותה נפתור, ואז נציב בפונקציה את שיעור ה-x שקיבלנו, כדי לקבל את ערך ה-y בנקודה. בהמשך כדי לגלות את סוג הקיצון (min, max) נצטרך למצוא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.



תחומי עלייה וירידה

ניתן לשים לב שבין נקודות הקיצון הפונקציה נמצאת או במגמת עלייה או מגמת ירידה. נזכור כי שיפוע הפונקציה בכל נקודה שווה לערך הנגזרת שלה בנקודה זו, ומכאן נוכל לנסח כלל שיבדוק אם בנקודה מסוימת הפונקציה עולה או יורדת. כדי לברר זאת נבדוק אם ערך הנגזרת בנקודה שלנו הוא חיובי או שלילי: את גודל השיפוע, למעשה אנו בודקים רק את סימן הערך של הנגזרת (כאשר מתקבל ערך **שלילי** הפונקציה בנקודה **יורדת**, וכאשר מתקבל ערך **חיובי** הפונקציה בנקודה **עולה**) הבדיקה נעשת ע"י הצבה של שיעור ה-x של אחת הנקודות מכל תחום שבין נקודות הקיצון (או נקודות אי הגדרה)

"ניצחון הוא נחלת המתמידים" – נפוליון בונפרטה

דוגמא לחקירה מלאה.

נחקור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2$

א. תחום הגדרה של הפונקציה:

שלב ראשון של חקירה מתחיל במציאת תחום הגדרה, כאשר ידוע שפונקצית הפולינום מוגדרת **לכל x** או בכתיבה מתמטית $x\in R$.

ב. מציאת נקודות חשודות (קיצון (min, max) או פיתול)

בנקודות הקיצון (ובחלק נקודות הפיתול) של הפונקציה אנו יודעים ששיפוע המשיק הוא אפס. זכורו, **שיפוע המשיק של הפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודה ולכן** **<u>תחילה</u>** נגזור את הפונקציה : $f'(x)=x^3-4x^2+4x$ **לאחר מכן נשווה את הנגזרת לאפס** ונקבל את המשוואה הבאה: $x^3-4x^2+4x=0$. כיוון שאנו לא יודעים לפתור משוואה ממעלה שלישית נוציא גורם משותף מכל האיברים,

$x(x^2-4x+4)=0$

מכיוון שמדובר כאן במכפלה ששווה לאפס, הרי ששוויון כזה יכול להתקיים רק אם לפחות אחד הכופלים הוא אפס בעצמו. מכאן ניתן לקבוע כי במקרה אחד x^2- , $4x+4=0$ ובמקרה אחר $x=0$.

לאחר שנפתור את המשוואה ריבועית שהתקבלה, נקבל את הפתרונות הבאים: $x=2$, $x=0$. נציב את הפתרונות בפונקציה ונקבל את שיעור ה-y של כל נקודה $\left(2,1\frac{1}{3}\right)$, $(0,0)$.

השלב הבא יהיה לקבוע אם נקודות הקיצון שמצאנו הן נקודות מינימום, מקסימום או פיתול לשם כך, נצטרך למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. (ניתן לעשות זאת גם ע"י נגזרת שנייה)

ג. מציאת תחומי עלייה וירידה:

אנו יודעים שבין כל שתי נקודות קיצון הפונקציה יכולה לעלות, לרדת או להישאר ללא שינוי (נקודת פיתול). העלייה, הירידה או הפיתול ייקבעו על-ידי מציאת שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהי שבין שתי נקודות הקיצון. כפי שהוסבר, את שיפוע המשיק לפונקציה בכל נקודה ניתן למצוא בעזרת פונקצית הנגזרת על-ידי הצבה של שיעור ה-x בנגזרת.

אנו מתרכזים בתחומים שבין נקודות הקיצון.

בתחום ש- $x<0$ נציב $x=-3$ ונקבל : $f'(-3)=(-2)^3-4(-2)^2+4(-2)=-32<0$

בתחום ש- $0<x<2$ נציב $x=1$ ונקבל : $f'(1)=(1)^3-4\cdot(1)^2+4\cdot(1)=1>0$

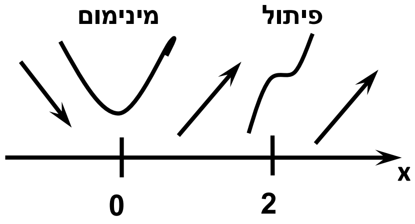
בתחום ש- $x>2$ נציב $x=1$ ונקבל : $f'(4)=(4)^3-4\cdot(4)^2+4\cdot(4)=1>0$

בתחומים שערך הנגזרת חיובי הפונקציה עולה

ובתחומים שערך הנגזרת שלילי הפונקציה יורדת ולכן:

תחומי ירידה: $x < 0$

תחומי העלייה: $x > 2$ **,** $0 < x < 2$



ד. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים:

ידוע **ששיעור ה-y** של נקודה הנמצאת על **ציר ה-x הוא 0 וכמו כן ..**

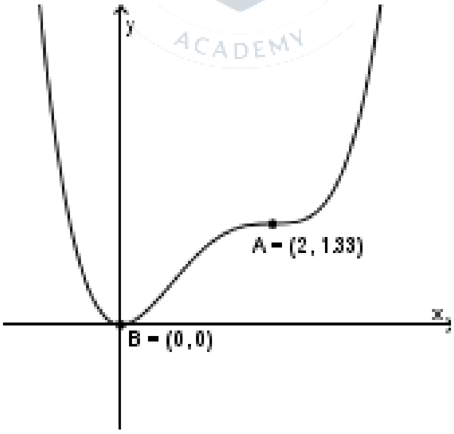
ידוע **ששיעור ה-x** של נקודה הנמצאת על **ציר ה-y הוא 0**

עם ציר ה-x y=0	**עם ציר ה-x y=0**
$\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 = 0$ $x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right) = 0$ **(0,0)מתקבלת הנקודה:**	$f(0) = \frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{4}{3}\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2 = 0$ **מתקבלת הנקודה: (0,0)**

ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים

לפונקצית הפולינום אין אסימפטות

ו. שרטוט הפונקציה



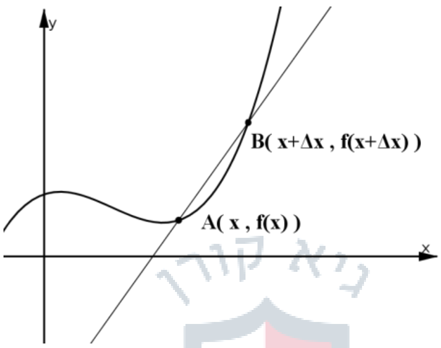
"כל כך התרגלנו להעמיד פנים כלפי אחרים, עד שלא שמנו לב שאנו מעמידים פנים גם כלפי עצמנו" דוסטויבסקי

נספחים

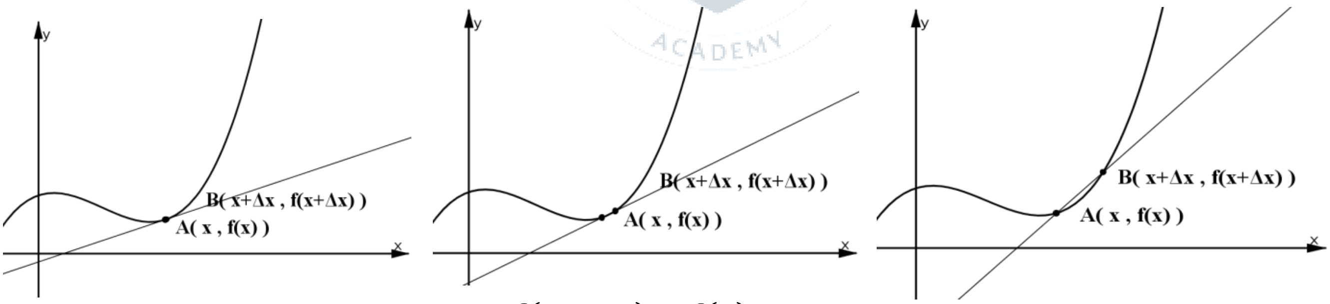
למדנו ששיפוע של קו ישר הוא יחס השינוי בכיוון ציר ה-y, יחסית לשינוי בהתקדמות בציר ה-x. לפי הנוסחא:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

בנוסף אנו יודעים ששיפוע של קו ישר הוא קבוע. ואינו משתנה מנקודה לנקודה. אך כאשר אנו נעסוק בפונקציות שאינן קוויות ניתן לשים לב שהשיפוע מנקודה לנקודה משתנה לכן נצטרך כלי אחר לחישוב שיפוע הפונקציה בכל נקודה ונקודה בנפרד. כעת נגדיר שתי נקודות על הפונקציה שבאיור 1. נקודה $\boldsymbol{A(x, f(x))}$ ונקודה $\boldsymbol{B(x + \Delta x, f(x + \Delta x))}$ כאשר הנקודה B נמצאת מימין לנקודה A ולכן הוספנו לשיעור ה-x של B, $\mathbf{\Delta x}$ (גודל מסוים).



אנו נרצה למצוא את השיפוע לפונקציה בנקודה A, לכן ניתן לראות שככל שנקרב את הנקודה B ל-A גודלו של השיפוע של הישר הנ"ל יתקרב לגודלו של השיפוע של המשיק בנקודה A



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\boldsymbol{f(x + \Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{x + \Delta x - x}}$$
$$= \frac{\boldsymbol{f(x + \Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

במקרה שלנו נרצה ש-Δx יהיה שואף לאפס על מנת ששתי הנקודות התלכדו, לכן נרשום את הגבול הבא:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}}$$

זו היא למעשה **הנגזרת של הפונקציה** לפי הגדרה.

דוגמא 1: לגזירה לפי ההגדרה

אם נרצה למצוא את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2$ נשתמש בגבול שקיבלנו קודם:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

למעשה קבלנו שהפונקצית הנגזרת של $f(x) = x^2$ היא $f'(x) = 2x$

דוגמא 2: לגזירה לפי ההגדרה

אם נרצה למצוא את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^3$ נשתמש בגבול שקיבלנו קודם:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{x^3}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x^2$$

למעשה קבלנו שהפונקצית הנגזרת של $f(x) = x^3$ היא $f'(x) = 3x^2$

דוגמא 3: לגזירה לפי ההגדרה

אם נרצה למצוא את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^n$ נשתמש בגבול שקיבלנו קודם:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}\Delta x + \cdots nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - \cancel{x^n}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x + \cdots nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(nx^{n-1} + \cdots nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} nx^{n-1} + \cdots nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}$$

למעשה קבלנו שהפונקצית הנגזרת של $f(x) = x^3$ היא $f'(x) = 3x^2$