

סוג הבחינה: בגרות

מועד הבחינה: חורף תש"ף, 2020

מספר השאלון: 035582

נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון שני

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים –  $33\frac{1}{3} \times 2$  –  $66\frac{2}{3}$  נקודות

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות –  $33\frac{1}{3} \times 1$  –  $33\frac{1}{3}$  נקודות

סך הכול – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

**פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,  
מספרים מרוכבים** ( $\frac{2}{3}$  נקודות) 66

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה —  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. הנקודה A נמצאת על האליפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ברביע הראשון.  $a$  ו- $b$  הם פרמטרים חיוביים.

נתון:  $a > b$ , אורך הציר הגדול של האליפסה הוא 13.

$F_1$  ו- $F_2$  הם מוקדי האליפסה.

היקף המשולש  $F_1AF_2$  הוא 25 ושטחו 12.

**א.** מצא את משוואת האליפסה.

**ב.** מצא את שיעורי הנקודה A.

דרך הנקודה A עוברת פרבולה שמשוואתה היא  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$  ואינו שלם).

דרך הנקודה A העבירו משיק לפרבולה. המשיק חותך את ציר ה- $x$  בנקודה L.

**ג.** מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה L.

הפרבולה והאליפסה נחתכות בנקודה נוספת, B.

הנקודה D נמצאת על הישר AB.

**ד.** מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל נקודות מפגשי התיכונים במשולשים ALD.

2. הישר  $\ell$  עובר דרך ראשית הצירים, O, ומאונך למישור  $\pi$ . הנקודה  $P(-1, -1, 2)$  היא נקודת החיתוך של הישר  $\ell$  והמישור  $\pi$ . מצא את משוואת המישור  $\pi$ .
- OABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן הנמצא על המישור  $\pi$  (הנקודה O היא ראשית הצירים). הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של המישור  $\pi$  עם ציר ה-x ועם ציר ה-y בהתאמה.
- ג. (1) מצא את שיעורי הקודקודים A ו-B.  
(2) מצא את שיעורי הקודקודים C ו-D.
- ג. חשב את גודל הזווית בין הפאה הצדדית AOB בפירמידה OABCD ובין בסיס הפירמידה. הנקודות  $F(-4, -2, 0)$  ו- $G(-2, -4, 0)$  נמצאות על הקטע AB.
- ד. (1) הראה כי  $|FG| = \frac{1}{3}|AB|$ .  
(2) מצא שיעורים של שתי נקודות, H ו-I, כך שנפח הפירמידה OFGHI הוא  $\frac{1}{3}$  מנפח הפירמידה OABCD. נמק את תשובתך.

3. א. פתור את המשוואה  $z^3 = -1$  (z הוא מספר מרוכב). פרט את חישוביך.
- ב.  $a_n$  היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא  $2i$ . הראה כי לכל n טבעי  $a_{n+4} = 16a_n$ .
- הנקודות A, B, C ו-D במישור גאוס מייצגות את איברי הסדרה  $a_1, a_2, a_3$  ו- $a_4$  בהתאמה.  $a_1$  הוא אחד הפתרונות של המשוואה  $z^3 = -1$ . הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.
- ג. (1) סרטט סקיצה של המרובע ABCD.  
(2) מצא את שטח המרובע ABCD.
- ד. הנקודות A', B', C' ו-D' מייצגות את איברי הסדרה  $a_5, a_6, a_7$  ו- $a_8$  בהתאמה. מצא את היחס בין שטח המרובע A'B'C'D' ובין שטח המרובע ABCD  $\left(\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}\right)$ . נמק.

**פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות** (33  $\frac{1}{3}$  נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

**שים לב:** אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{\left(\frac{a}{x-1}\right)} + c$ .  $a$  ו- $c$  הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$  היא  $y = 1$ ,

הפונקציה  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0, e^{-4})$ .

ב. מצא את הערך של  $c$  ואת הערך של  $a$ .

ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

(2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה)?

לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה  $x = -1$ .

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(2) לאילו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.

ה. העבירו משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת הפיתול שלה. המשיק עובר בראשית הצירים.

הסבר מדוע השטח הנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$

קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$ .

5. נתונה פונקציית הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ :  $f'(x) = \frac{\ln(-x) + 2}{x}$ .

לפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו-  $f''(x)$  יש אותו תחום הגדרה.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה  $\cup$  והקעירות כלפי מטה  $\cap$  של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ ?

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ .

נתון:  $f(-e^{-2}) = 0$ .

ג. (1) מצא ביטוי אלגברי לפונקציה  $f(x)$ .

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

**בהצלחה!**

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - חורף תש"ף - 23.1.2020**

1. א.  $\frac{4x^2}{169} + \frac{4y^2}{25} = 1$ . ב.  $A(3.9, 2)$ . ג.  $x_L = -3.9$ . ד.  $x = 1.3$

2. א.  $x + y - 2x + 6 = 0$ . ב. (1).  $A(-6, 0, 0)$ ,  $B(0, -6, 0)$ . (2).  $C(4, -2, 4)$ ,  $D(-2, 4, 4)$ .

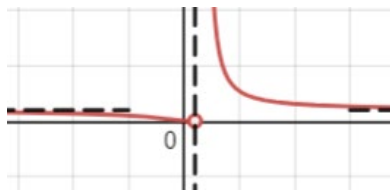
ג.  $35.26^\circ$ . ד. (1). הוכחה. (2). לדוגמא:  $I(0, 2, 4)$ ,  $H(2, 0, 4)$



3. א.  $cis60, cis180, cis360$ . ב. הוכחה. ג. (1).

ד. 25. (2). היחס הוא 256

4. א.  $x \neq 1$ . ב.  $a = 4, c = 0$ . ג. (1) תחום עלייה: אין, תחום ירידה:  $x > 1$  או  $x < 1$



(2). הפונקציה חיובית לכל תחום הגדרתה. ד. (1).

(2).  $0 < k < 1$  או  $k > 1$ . ה. הוכחה

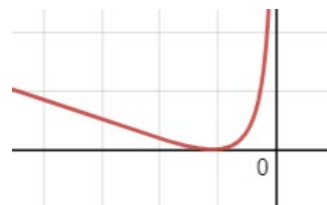
5. א. (1).  $x < 0$ . (2). תחום עלייה:  $-\frac{1}{e^2} < x < 0$ , תחום ירידה:  $x < -\frac{1}{e^2}$ . (3). תחום

קעירות כלפי מעלה  $0 < x < -\frac{1}{e^2}$ , תחום קעירות כלפי מטה  $x < -\frac{1}{e^2}$



$f(x) = \frac{[\ln(-x)]^2}{2} + 2 \ln(-x) + 2$

ב. (1)  $x = 0, y = 0$ . (2).



(2).

## מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים –  $33\frac{1}{3} \times 2$  –  $66\frac{2}{3}$  נקודות

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות –  $33\frac{1}{3} \times 1$  –  $33\frac{1}{3}$  נקודות

סך הכול – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

**פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,**

**מספרים מרוכבים** ( $\frac{2}{3}$  נקודות) 66

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה —  $\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1.  $OMG$  הוא משולש. הנקודה  $O$  היא ראשית הצירים.

מן הנקודה  $M(2, 6)$  הורידו גובה לצלע  $OG$ .

נתון כי אורך הגובה שהורידו הוא 6.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות  $G$  המתקבלות באופן הזה נמצא על שני ישרים, ומצא את משוואותיהם של הישרים.

מעגל שמרכזו בנקודה  $M$  משיק לשני הישרים שמצאת בסעיף א בנקודות  $P$  ו- $Q$ .

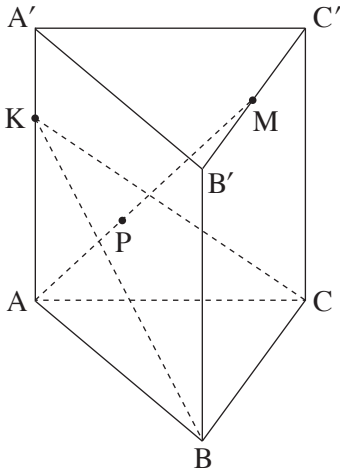
ב. (1) רשום את משוואת המעגל.

(2) מצא את שיעורי הנקודות  $P$  ו- $Q$ .

ג. האם המרובע  $OPMQ$  הוא בר חסימה במעגל? נמק.

אם כן, מצא את משוואת המעגל החוסם אותו.





2. נתונה מנסרה ישרה משולשת  $ABCA'B'C'$ .

נתון: הנקודה  $M$  היא אמצע הקטע  $B'C'$ .

הנקודה  $K$  נמצאת על הקטע  $AA'$  ומקיימת  $AK = 2KA'$ .

נסמן:  $\vec{AA'} = \underline{w}$ ,  $\vec{KC} = \underline{v}$ ,  $\vec{KB} = \underline{u}$ .

א. הבע את  $\vec{AM}$  באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו-  $\underline{w}$ .

ב.  $P$  היא נקודה על  $AM$  המקיימת:  $\vec{KP} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v}$  (הם סקלרים).

מצא את  $\alpha$  ו-  $\beta$ .

נתון:  $\underline{v} = (10, -5, 0)$ ,  $\underline{u} = (5, 5, -5)$ ,  $P(0, 4, 6)$ .

ג. (1) הסבר מדוע הנקודה  $P$  נמצאת על המישור  $KBC$ .

(2) מצא את משוואת המישור  $KBC$ .

(3) מצא את שיעורי הנקודה  $K$ .

3.  $z_1$  ו-  $z_2$  הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון:  $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$ ,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

$\frac{z_1}{z_2}$  הוא מספר ממשי.

א. (1) מצא את  $\alpha$  ואת  $\frac{z_1}{z_2}$ .

(2) הראה כי  $z_1 \cdot z_2$  הוא מספר מדומה.

נתון:  $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$ .

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה  $z^3 = w^6$ .

ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס?

אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

(2) תן דוגמה למספר טבעי  $n > 6$  שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב מהווים קודקודים של מצולע משוכלל

בעל  $n$  קודקודים.

**פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות** (33  $\frac{1}{3}$  נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

**שים לב:** אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln((e^x - b)^2 + 1)$ . הוא פרמטר.  $b$

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות  $b$ .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

(2) נמק מדוע  $f(x) \geq 0$  בכל תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצא את המשוואה של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .

(4) קבע בעבור אילו ערכים של  $b$  יש לפונקציה  $f(x)$  נקודת קיצון,

ואם יש כזאת, מצא את שיעוריה, והראה שהיא נקודת מינימום.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  עבור  $b = 2$ .

ב. מצא את כל הערכים של  $b$  שבעבורם הישר  $y = \ln 5$  הוא אסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$ . נמק.

ג. נתון כי בעבור אחד מן הערכים של  $b$  שמצאת בסעיף ב, אין לפונקציה  $f(x)$  נקודות קיצון.

בעבור הערך הזה של  $b$ , קבע אם הפונקציה  $f(x)$  עולה או יורדת. נמק.

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = e^x(x - 5)$ , המוגדרת לכל  $x$ .
- א. הראה כי  $f'(x) = e^x(x - 4)$  וכי  $f''(x) = e^x(x - 3)$ .
- ב.  $f^{(n)}(x)$  היא הנגזרת מסדר  $n$  של  $f(x)$  (למשל  $f^{(3)}(x) = f'''(x)$ ). נתונה החוקיות:  $f^{(n)}(x) = e^x(x - 5 + n)$  בעבור כל  $n$  טבעי.
- ג. מצא את  $f'''(x)$ , והראה כי החוקיות הנתונה מתקיימת בעבורה.
- ד. ענה על סעיף ג. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות  $n$ .
- ה. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f^{(n)}(x)$  עם הצירים.
- ו. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f^{(n)}(x)$ .
- ז. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f^{(n)}(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- ח. הראה כי הגרפים של הפונקציות  $f^{(m)}(x)$  ו-  $f^{(k)}(x)$  אינם נחתכים בעבור שני מספרים טבעיים שונים  $m$  ו-  $k$ .
- ט. סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , ו-  $f''(x)$ , וכתוב איזה מן הגרפים מתאים לכל אחת מן הפונקציות.
- י. הסתמך על החוקיות הנתונה, ומצא לפונקציה  $f(x)$  פונקציה קדומה,  $F(x)$ , אם נתון כי הגרף של הפונקציה  $F(x)$  עובר בראשית הצירים. אמת את תשובתך על ידי גזירה.

### בהצלחה!

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - קיץ תש"ף - 29.06.2020**

1. א.  $y = 0, y = -\frac{3}{4}x$ . ב.  $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$ . (1) ג.  $(-1.6, 1.2), (2, 0)$ . (2)

ג. כן,  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$

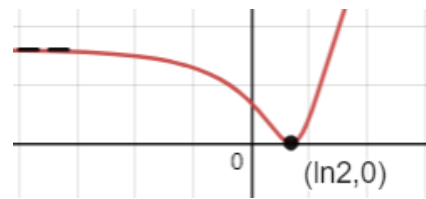
2. א.  $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{3}\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$ . ב.  $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{5}$ . ג. (1) הסבר. (2)  $x + 2y + 3x - 26 = 0$

(3)  $K(-3, 4, 7)$

3. א. (1)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{z_1}{z_2} = \text{cis}(-\pi) = -1$ . (2)  $z_1 \cdot z_2 = i$ . ב.  $2\text{cis}\frac{1}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{5}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{3}{2}\pi$

ג. (1) כן. (2)  $(0, 2), (-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1)$ . (2) ג.  $n = 9$

4. א. (1) כל  $x$ . (2) הסבר. (3)  $y = \ln(b^2 + 1)$ . (4) נקודת מינימום  $(\ln b, 0)$ ,  $b > 0$

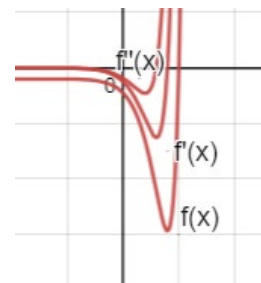


(5)  $b = 2, b = -2$

ג. עבור  $b = -2$  אין לפונקציה נקודות קיצון, הפונקציה תמיד עולה.

5. א. הוכחה ב.  $f'''(x) = e^x(x-2)$ . ג. (1)  $(5-n, 0)$ , (2)  $(0, n-5)$ ,  $y = 0$

(3) נקודת מינימום  $(4-m, -e^{4-n})$ . (4) הוכחה



(5)  $F(x) = e^x(x-6) + 6$

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון שני

#### הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.  
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,  
טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים –  $33\frac{1}{3} \times 2$  –  $66\frac{2}{3}$  נקודות  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,  
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות –  $33\frac{1}{3} \times 1$  –  $33\frac{1}{3}$  נקודות  
סך הכול – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.  
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:  
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.  
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.  
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

**מספרים מרוכבים** ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. הישר  $4x - 3y = 0$  משיק למעגל שמרכזו  $(5a, 0)$ .  $a$  הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את משוואת המעגל באמצעות  $a$ .

מנקודה  $G$ , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר, המשיק למעגל בנקודה  $K$ .

ב. הבע באמצעות  $a$  את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות  $G$  שבעבורן המרחק  $GK$  שווה למרחק שלהן

מן הישר  $x = -3a$  וצייר סקיצה שלו.

נתון: אורך הקטע  $GK$  הקצר ביותר האפשרי הוא 7.5.

ג. (1) מה הם שיעורי הנקודה  $G$  שבעבורה אורך הקטע  $GK$  הוא 7.5? נמק.

(2) מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ . נמק.

2. נתונים שני ישרים:  $\ell_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$

$\ell_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$

ונתון הווקטור  $\underline{u} = (6, 0, -8)$ .

הנקודה  $A$  נמצאת על הישר  $\ell_1$  והנקודה  $C$  נמצאת על הישר  $\ell_2$  כך ש-  $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$ .

א. מצא את שיעורי הנקודות  $A$  ו-  $C$ .

$SABC$  היא פירמידה ישרה שבסיסה,  $ABC$ , הוא משולש ישר זווית ( $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ ).

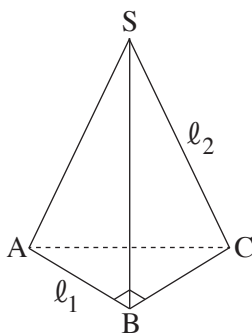
הנקודה  $S$  נמצאת על הישר  $\ell_2$  והנקודה  $B$  נמצאת על הישר  $\ell_1$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .

ג. מצא את משוואת המישור  $ABC$ .

הנקודה  $C$  העלו אנך למישור  $ABC$ .

ד. חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר  $\ell_2$ .



3.  $z$  הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה  $z^5 = 2^5$ .

הנקודות  $A_1, A_2, \dots, A_n$  במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה  $z^n = 2^n$  ( $n \geq 3$  הוא מספר טבעי).  
חיברו את הנקודות  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ויצרו מצולע משוכלל קמור.

נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- $n$ .

ב. מצא את  $n$ .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של  $n$  שמצאת בסעיף ב.

הוא פתרון של המשוואה  $z^n = 2^n$  כך ש-  $a \cdot b > 0$  [כלומר:  $\text{Re}(w) \cdot \text{Im}(w) > 0$ ].

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות  $w$  כאלה?

ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן.

אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו

במספר  $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.

ד. מצא את הזווית  $\theta$ . נמק.

**פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות** ( $\frac{1}{3}$  נקודות)

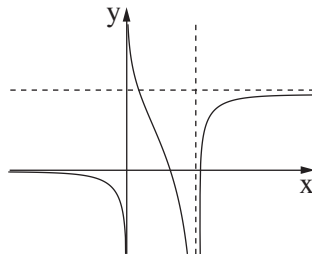
ענה על אחת מן השאלות 4-5.

**שים לב:** אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

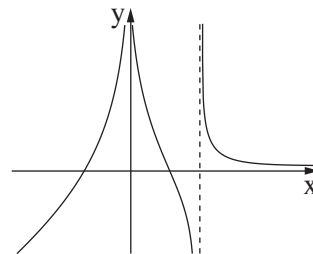
4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - ae^x + 3}$ . הוא פרמטר.

הפונקציה  $f(x)$  אינה מוגדרת בעבור  $x = 0$ .

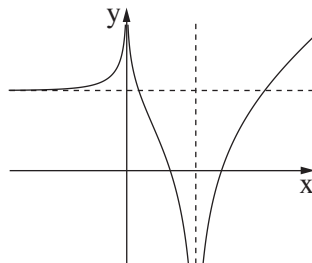
- א. (1) מצא את  $a$  ואת תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$ .
- (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. אחד מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה  $f(x)$ , המוגדרת בתחום ההגדרה של  $f(x)$ . איזה מהם מתאר אותה? נמק.
- ד. נתונה הפונקציה  $h(x) = f(x + k)$ . עבור איזה ערך של  $k \neq 0$  יש לפונקציה  $h(x)$  אסימפטוטה שמשוואתה היא  $x = 0$ ? נמק.



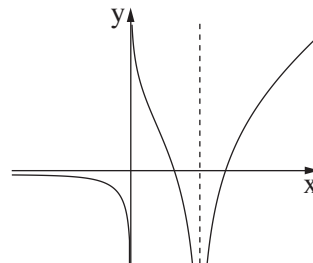
II



I



IV



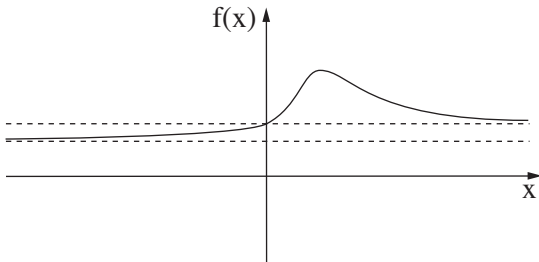
III



5. הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x) = \ln(f(x))$  מוגדרות וגזירות לכל  $x$ .

א. הראה כי לפונקציה  $f(x)$  ולפונקציה  $\ln(f(x))$  יש נקודות קיצון באותם שיעורי  $x$  ונקודות הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה  $f(x)$ , כך ש-  $f(x)$  ו-  $g(x) = \ln(f(x))$  מוגדרות וגזירות לכל  $x$ . לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם  $(1, 2)$ , ושתי אסימפטוטות:



אסימפטוטה שמשוואתה היא  $y = 1$ ,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא  $y = \frac{2}{3}$ .

גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 1$ .

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ? נמק.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ ?

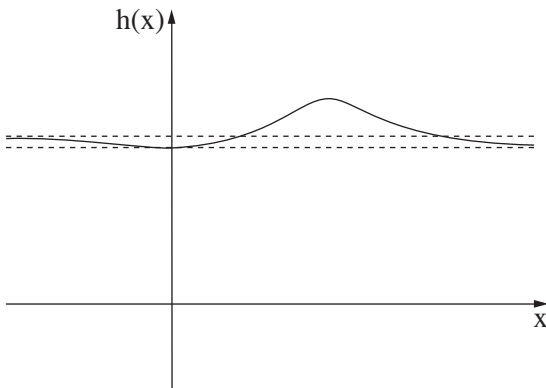
(3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים?

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $g(x)$ . נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

נגדיר:  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה  $h(x)$ .



ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $h(x)$ .

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$

כך שהקטע AB מאונך לציר ה- $x$ .

מהו שיעור ה- $x$  שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1?

נמק.

### בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"5 יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - קיץ תש"ף-מועד ב' - 27.7.2020**

1. א.  $(x - 5a)^2 + y^2 = 16a^2$ .

ב.  $y^2 = 16ax$ .

ג.  $a = 2.5$ . (2)  $G(0,0)$ . (1).

2. א.  $A(0,0,1), C(6,0,-7)$ . ב.  $B(3,5,-3)$ .

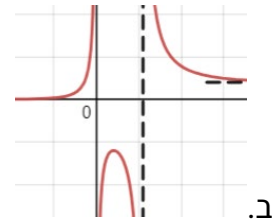
ג.  $4x + 3z - 3 = 0$ . ד.  $18.43^\circ$ .

3. א.  $z = 2, 2cis72^\circ, 2cis144^\circ, 2cis216^\circ, 2cis288^\circ$ .

ב.  $n = 12$ . ג. ברביע הראשון וברביע השלישי. ד.  $\theta = 45^\circ$ .

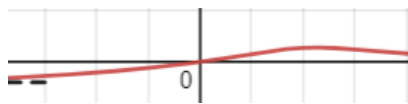
4. א. (1).  $a = 4$ . תחום ההגדרה הוא:  $x \neq 0, x \neq \ln 3$ . (2)  $y = 0, y = 2, x = \ln 3, x = 0$ .

(3). תחומי העלייה:  $0 < x < \ln 1.5, x < 0$ ; תחומי הירידה:  $\ln 1.5 < x < \ln 3, \ln 3 < x$ .



$k = \ln 3$

5. א. הוכחה ב. (1). כל  $x$ . (2). נקודת מקסימום ב  $(1, \ln 2)$ . (3).  $y = 0, y = \ln \frac{2}{3}$ .



(4). תחום חיוביות:  $0 < x$ ; תחום שליליות:  $x < 0$ . (5).

ג. (1). נקודת מקסימום ב  $(1, 1.306)$ , נקודת מינימום ב  $(0, 1)$ .

## מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך —  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

**בהצלחה!**

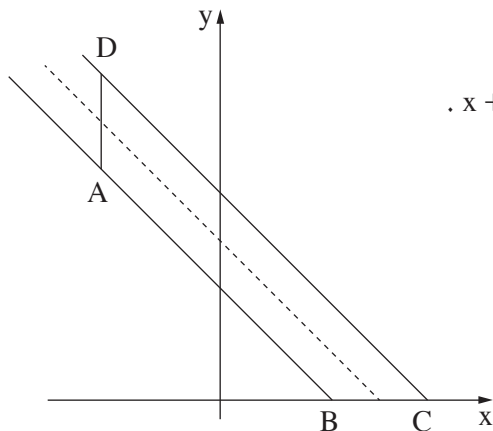
## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel DC$ ).

נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז, AB ו-DC, הוא  $\sqrt{2}$ ,

קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על הישר  $x + y - 4 = 0$ .

א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז נמצאים עליהם.

נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה-x.

מעבירים פרבולה קנונית  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ )

כך שהקודקודים A ו-D של הטרפז נמצאים על מדרוך הפרבולה,

ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. (1) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה

הטרפז ABCD הוא הגדול מבין שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה הטרפז ABCD הוא הקטן מבין שני הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה-x וחותר את שתי הפרבולות שמצאת בסעיף ב בשתי נקודות, E ו-F.

מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

2. ABC הוא משולש.

$$\vec{AC} = \underline{v}, \vec{AB} = \underline{u} \text{ נסמן:}$$

$$\text{נתון: } A(0, 2, -1), B(-3, 2, 2)$$

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \text{ הנקודה } D(-2, 3, 1) \text{ נמצאת על הקטע } BC \text{ כך ש-}$$

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

(2) מצא את משוואת המישור ABC.

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש- ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש האלכסונים במלבן זה.

S היא נקודה כך ש- MS מאונך למישור ABEC.

ב. (1) מצא הצגה פרמטרית לישור MS, והסבר מדוע לכל נקודה S כזו SABEC היא פירמידה ישרה.

(2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת-סעיף ב(1).

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB.

(3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P, כך ש- PABEC היא פירמידה ישרה שבעבורה

$$\angle SAB = \angle PAB \text{ מתקיים?}$$

אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.

3. נתונה המשוואה  $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$  (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך

ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w.

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

$$\text{נתון: } w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו

לאחר ההכפלה ב- w.

## פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.  
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן (אם יש כאלה).  
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. הסבר מדוע לכל  $b < 0$  מתקיים:  $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$ .  
 נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{k}{f(x)}$ , שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  $k$  הוא פרמטר.  
 נתון כי לפונקציה  $g(x)$  יש נקודת מינימום.  
 ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור  $k$ ? נמק.

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.  
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 (4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).  
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. הישר  $y = k$  אינו חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  ( $k$  הוא פרמטר). מצא את  $k$ . נמק.
- ג. נגדיר  $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$   $e^{-1} \leq x < e$ .  
 (1) לפניך שלושה ערכי  $x$ , (III-I). בעבור איזה מהם הערך של  $T(x)$  הוא הכי גדול? נמק.  
 $x = \frac{1}{2}$  (I)       $x = 1$  (II)       $x = 2$  (III)  
 (2) הסבר מדוע בעבור כל  $e^{-1} \leq x < e$  מתקיים:  $T(x) < 1$ .

### בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח 5"  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - חורף תשפ"א - 3.2.2021**

1. א.  $AB: y = -x + 3, CD: y = -x + 5$  ב.  $y^2 = 20x$ . (1)  $y^2 = 12x$ . (2)  $y^2 = 15x$  ג.  $y^2 = 15x$

2. א. (1).  $C(0,5,-1)$ , הוכחה  $(\sphericalangle A = 90^\circ)$ . (2)  $x + z + 1 = 0$

ב. (1).  $(-1.5, 3.5, 0.5) + t(1, 0, 1)$ . (2)  $S(-1, 3.5, 1)$ ,  $\sphericalangle SAB = 38.016^\circ$

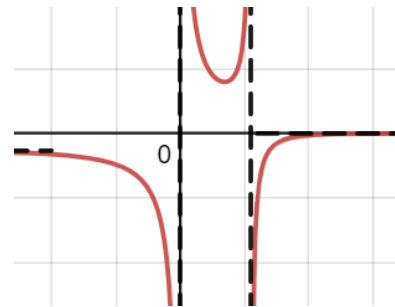
(3)  $P(-2, 3.5, 0)$

3. א.  $\frac{1}{2} \text{cis} 45^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 105^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 165^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 225^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 285^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 345^\circ$

ב. הוכחה ג. הוכחה ד.  $(z^6 - \frac{1}{64}i)(z^6 + \frac{1}{64}i) = 0$

4. א. (1).  $x \neq 0, x \neq \ln 3$ . (2)  $x = \ln 3, x = 0, y = 0, y = -\frac{4}{3}$ . (3)  $(\ln 2, 4)$  נקודת מינימום

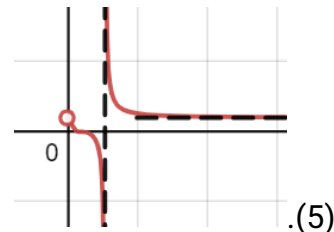
(4). תחום עלייה:  $\ln 3 < x$  או  $\ln 2 < x < \ln 3$  תחום ירידה:  $0 < x < \ln 2$  או  $x < 0$



ב. הוכחה ג.  $k < 0$

5. א. (1).  $x > 0, x \neq e$ . (2)  $x = e, y = 1$ . (3) תחום עלייה: אף א,א

תחום ירידה:  $0 < x < e$  או  $x > e$ . (4)  $(1, 0)$



ב.  $k = 1$  ג. (1). אפשרות 2:  $x = 1$ . (2) הסבר

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

## מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

**בהצלחה!**



## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1.  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה  $y^2 = 36x$  ברביע הראשון.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר AB הוא  $m = \frac{36}{y_2 + y_1}$ .

(2) הנקודה  $(x, 7\frac{1}{2})$  היא אמצע המיתר AB.  
מצא את m.

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר  $x = a$  שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה  $(9, 0)$ .

מרחק הנקודה A מן הישר  $x = 0.75a$  הוא 7.

(1) מהו הערך של a? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר AB.

2. נתון טרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AB \parallel DC$ ) (ראה סרטוט).

נתון:  $\angle DAB = 120^\circ$ .

נסמן:  $\vec{DC} = \underline{u}$ ,  $\vec{AD} = \underline{v}$ ,  $\vec{AB} = t\underline{u}$  (t הוא סקלר).

א. (1) הבע את t באמצעות  $|\underline{u}|$  ו-  $|\underline{v}|$ .

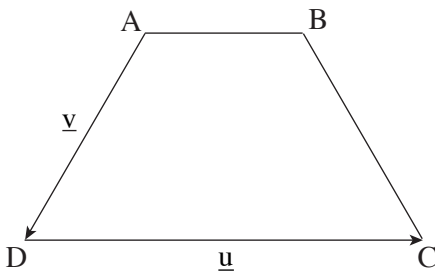
(2) הבע את הווקטור  $\vec{BC}$  באמצעות  $|\underline{u}|$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{u}$  ו-  $|\underline{v}|$ .

נתון:  $\underline{v} = (-1, y, 0)$ ,  $\underline{u} = (8, 6, -10)$ .

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של הווקטור  $\underline{v}$  (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף (1), הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז

חסום בו? נמק.



3. א. נתון מספר מרוכב  $z = r \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$ .

הסבר מדוע מתקיים:  $r \cdot [\cos(180^\circ + \theta) + i \cdot \sin(180^\circ + \theta)] = -z$ .

$z_1, z_2, z_3$  הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את  $z_1$  ו- $z_2$  נמצאות ברביע הראשון, והנקודה המייצגת את  $z_3$  נמצאת ברביע השלישי.

נסמן  $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ .

ב. הוכח כי המנה  $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$  היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים  $z_1$  ו- $z_3$  נמצאות על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$ .

ג. חשב את הערך המוחלט של  $z_2$ .

ד.  $z_4$  הוא הצמוד של  $z_3$ .

הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים  $z_2, z_3, z_4$ .

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

נתונות הפונקציות:  $h(x) = f(x^2)$ ,  $g(x) = 2 \cdot f'(x)$  בתחום  $x > 0$ .

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , קבע את סוגה,

והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה  $h(x)$ .

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות  $g(x)$  ו-  $h(x)$  נפגשים בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות  $g(x)$  ו-  $h(x)$  באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , גרף הפונקציה  $h(x)$  ועל ידי הישר  $x = a$ ,  $a > 1$ ,

שווה ל-  $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$ .

מצא את הערך של  $a$ . תוכל להשאיר  $\ln$  בתשובתך.

5. הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום  $-1 \leq x \leq 4$ .

אחד הגרפים הוא של הפונקציה  $f(x)$ ,

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה,  $f'(x)$ .

א. קבע מי מבין הגרפים I ו- II הוא הגרף של הפונקציה  $f(x)$ . נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = \ln(f(x))$ .

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$

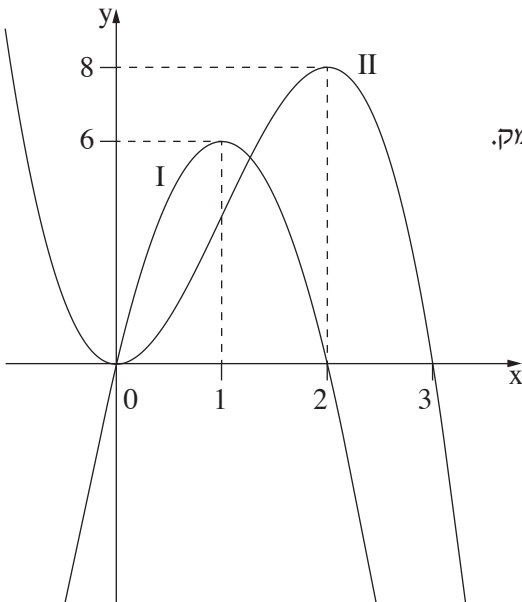
המאונכות לציר ה-  $x$ ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות

של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $g(x)$ .



### בהצלחה!

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד נבצרים - חורף תשפ"א - 1.3.2021**

1. א. (1). הוכחה (2).  $m = 2.4$

ב. (1).  $a = -9$ . (2).  $y = 2.4x + 2.4$

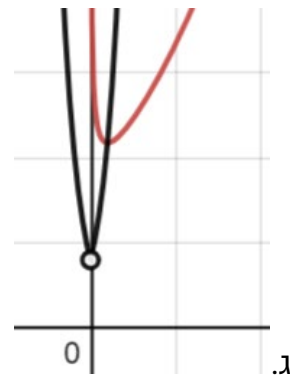
2. א. (1).  $t = 1 - \frac{|v|}{|u|}$ . (2).  $\vec{BC} = \frac{|v|}{|u|}\vec{u} + \underline{v}$

ב. (1).  $y = -7$ ,  $y = \frac{1}{7}$ . (2).  $y = -7$

3. א. הוכחה ב. הוכחה

ג.  $|z_2| = 3.5$   $\Delta$   $2.25 \sin 2\alpha$

4. א.  $0 \leq x < 1.4e$  ב.



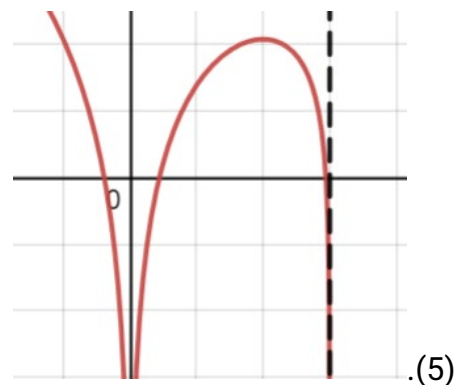
$\Delta$   $a = 4 - \ln 4$

5. א. גרף I -  $f'(x)$ , גרף II -  $f(x)$

ב. (1).  $0 < x < 3$ ,  $-1 \leq x < 0$ . (2).  $x = 0, x = 3$

(3).  $(2, \ln 8)$  נקודת מקסימום (4). תחום עלייה:  $0 < x < 2$

תחום ירידה:  $-1 < x < 0, 2 < x < 3$



## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון שני

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך –  $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

**בהצלחה!**

## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון: נקודה  $K$  נמצאת על הפרבולה  $y^2 = 4px$  ( $p > 0$ ).

שיעור ה- $y$  של נקודה  $K$  הוא 12.

המרחק בין נקודה  $K$  ובין מוקד הפרבולה הוא 20.

א. מצא את  $p$  (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הערכים של  $p$  שמצאת בסעיף א ב- $p_1$  ו- $p_2$ .  $p_1 < p_2$ .

ישר מן הצורה  $y = mx$  ( $m \neq 0$ ) חותך את הפרבולה  $y^2 = 4p_1x$  בראשית הצירים ונקודה נוספת,  $A$ ,

ואת הפרבולה  $y^2 = 4p_2x$  בראשית הצירים ונקודה נוספת,  $B$ .

הצב את הערכים  $p_1$  ו- $p_2$  שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.

ב. הבע את שיעורי נקודה  $A$ , ואת שיעורי נקודה  $B$  באמצעות  $m$ .

בעבור כל ישר  $y = mx$  ( $m \neq 0$ ), נסמן ב- $M$  את אמצע הקטע  $AB$  הנוצר באופן המתואר.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות  $M$  האלה (ללא  $m$ ).

2. נתונה התיבה  $ABCD A' B' C' D'$ .

הנקודה  $K$  נמצאת על המקצוע  $CC'$ .

הנקודה  $E$  היא אמצע המקצוע  $A'D'$  (ראה סרטוט).

נסמן:  $\vec{AA'} = \underline{w}$ ;  $\vec{AD} = \underline{v}$ ;  $\vec{AB} = \underline{u}$ ;  $\vec{CK} = t \cdot \vec{CC'}$  ( $t > 0$  הוא סקלר).

נתון:  $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$ ;  $|\underline{v}| = 6$ ;  $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$

.  $\angle EKB = 90^\circ$

א. מצא את  $t$ .

נסמן ב- $\pi$  את המישור  $CDA'B'$ .

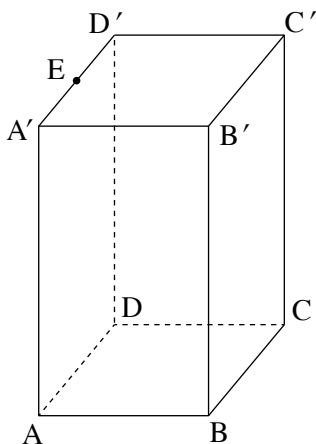
ב. (1) הוכח כי הישר  $BK$  מאונך למישור  $\pi$ .

(2) הסבר מדוע הישר  $EK$  מקביל למישור  $\pi$ .

נתון:  $B(-1, 0, 1)$ ;  $K(4, 5, -1)$ ,

.  $\underline{w} = (2, 2, -8)$

ג. מצא את משוואת המישור  $\pi$ .



3. א. פתור את המשוואה:  $z^2 - (1 + i)z + 2i + 2 = 0$ .

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה  $A$  במישור גאוס.

הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה  $B$  במישור גאוס.

דרך הנקודה  $B$  עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים  $O$ . הישר  $AO$  חותך את המעגל בנקודות  $C$  ו- $D$ .

במעגל חסום מצולע משוכלל בעל  $n$  צלעות.

נתון כי הנקודות  $D, C, B$  הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה- $n$  האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של  $n$  שמצאת בסעיף ב:

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת וגזירה לכל  $x$ . הגרף שלה חותך את ציר ה- $x$  בראשית הצירים בלבד. נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  הן  $(1, 1)$  ו- $(-1, -1)$  בלבד. הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  מתאפסת בעבור  $x = 1$  ו- $x = -1$  בלבד. ציר ה- $x$  הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה  $g(x)$  בעבור  $x$  שואף לאינסוף ובעבור  $x$  שואף למינוס אינסוף.
- א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- (2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של  $g'(x)$  (פונקציית הנגזרת של  $g(x)$ ).
- נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$ .
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- (4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
5. נתונה משפחת הפונקציות  $f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$ ,  $a \neq 0$ , הוא פרמטר. ענה על סעיפים א-ג בעבור  $a > 0$  ובעבור  $a < 0$ .
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. הבע באמצעות  $a$  את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה. נתון כי הפונקציה  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שונות.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- נתונה הפונקציה  $g(x) = f'(x)$  (נגזרת הפונקציה  $f(x)$ ) המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה  $f(x)$ . נתון:  $a > 0$ .
- ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , הישר  $x = \frac{2}{a}$  וציר ה- $x$ , והוכח כי השטח אינו תלוי ב- $a$ .

### בהצלחה!



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד מאוחר - חורף תשפ"א - 19.4.2021**

1. א.  $P = 18$  או  $P = 2$ . ב.  $A = (\frac{8}{m^2}, \frac{8}{m})$ ,  $B = (\frac{72}{m^2}, \frac{72}{m})$ . ג.  $y^2 = 40x$ .

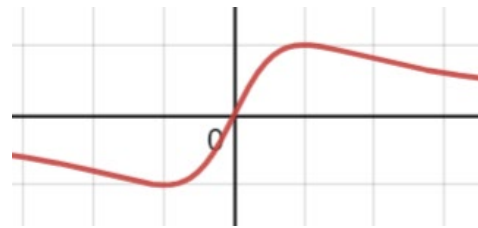
2. א.  $t = \frac{1}{2}$ . ב. (1). הוכחה. (2). הוכחה. ג.  $5x + 5y - 2z - 29 = 0$ .

3. א.  $Z_1 = 1 - i, Z_2 = 2i$ . ב.  $n = 8$ . ג. (1).

$(0, -2), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-2, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 2), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (2, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(2).  $Z^8 = 256$ .

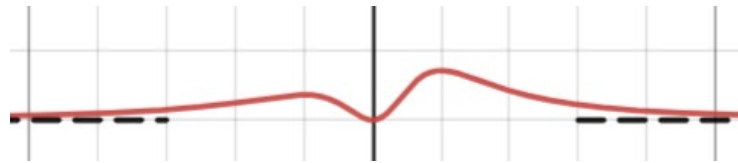
4. א. (1).



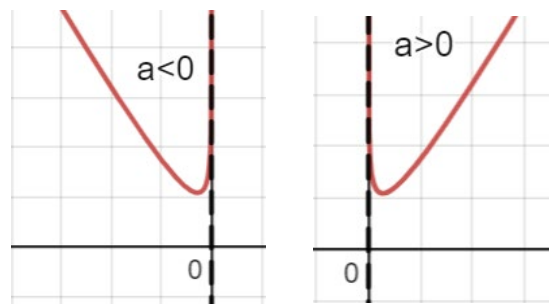
(2). תחום חיוביות:  $-1 < x < 1$ , תחום שליליות:  $x < -1, 1 < x$ . ב. (1). כל  $x$ .

(2).  $y = 1$ . (3). נקודת מקסימום,  $(0, 1)$  נקודת מינימום,

(4). נקודת מקסימום.  $(-1, \frac{1}{e} + 1)$ .



5. א.  $0 < x < a, a > 0$ ;  $x < 0, a > 0$ . ב.  $(\frac{1}{a}, 1 + \ln a^2)$  נקודת מינימום לכל  $a$ . ג.



$1 - \ln 2$ .

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

## מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך —  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

**בהצלחה!**

## השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

#### מספרים מרוכבים

1. נתון פרמטר  $a > 0$ .

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה  $(a, 0)$  שווה

למרחק שלהן מן הישר  $x = a - 1$ .

ב. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה  $(0, a)$  שווה

למרחק שלהן מן הישר  $y = a - 1$ .

נתון כי שני המקומות הגאומטריים שמצאת בסעיפים א-ב נחתכים בשתי נקודות. אחת הנקודות היא  $(2, 2)$ .

ג. (1) מצא את  $a$ .

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך האחרת.

מחברים את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים עם הנקודות  $(3a, 0)$  ו- $(0, 3a)$  כך שמתקבל מרובע.

ד. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמק.

(2) חשב את שטח המרובע.

2. נתונה פירמידה מרובעת SABCD שבסיסה ABCD הוא מעוין.

נתון:  $\vec{SA}$  מאונך לבסיס הפירמידה,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $SA = BA$ ,  $\vec{SE} = t \cdot \vec{SC}$ ,  $0 < t < 1$  הוא פרמטר.

נסמן:  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AD} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ .

א. הבע את הווקטורים  $\vec{EB}$  ו- $\vec{ED}$  באמצעות  $\underline{t}$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ .

ב. נתון:  $t = \frac{1}{2}$ .

(1) הוכח כי  $\vec{EB}$  מאונך ל- $\vec{ED}$ .

(2) הוכח כי האנך מן הנקודה E לבסיס עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים של המעוין.

נתון:  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(6\sqrt{3}, 6, 0)$ , קודקוד D נמצא על ציר ה-y בכיוון החיובי,

שיעור ה-z של הנקודה S גדול מאפס.

ג. חשב את שיעורי הקודקודים S ו-D.

ד. מצא את משוואת המישור SAB.

3. נתונה המשוואה  $z^4 = -16$  (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

ג. כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע.

ד. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי,  $11 < n < 17$  ו-c הוא מספר ממשי.

כל אחד מן המספרים המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה  $z^n = c$ .

ד. מצא את n ואת c.

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה  $z^n = c$  שמצאת בסעיף ד, יוצרות

מצולע בעל n צלעות.

ה. מצא את שטח המצולע.

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = 1 + ae^{-2x}$  המוגדרת לכל  $x$ .  $a$  הוא פרמטר,  $a > 1$ .  
בטא את תשובותיך באמצעות  $a$ , לפי הצורך.
- א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
 (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).  
 (3) נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .
- ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ? נמק את תשובתך.  
 (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
 (2) ידוע כי לפונקציה  $g(x)$  יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר  $x = \frac{\ln(a)}{2}$ .  
 (3) מצא את שיעור ה- $y$  של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g'(x)$ .  
 (1) סרטט את גרף הפונקציה  $g'(x)$ . פרט את שיקוליך.  
 (2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g'(x)$  ועל ידי הישרים  $x = 0$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .

5. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{(x + 2)(x - 1)}\right)$ .
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.  
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 (3) סרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 (4) נתונה הפונקציה:  $g(x) = \ln(f(x))$ .
- ב. היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך.  
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .  
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה).  
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ . פרט את שיקוליך.
- ג. בעבור כל  $x$  המקיים  $0 < f(x) < 1$ , קבע אם המכפלה  $f(x) \cdot g(x)$  חיובית. נמק את קביעתך.

### בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ב"ח 7"**  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - קיץ תשפ"א - 19.5.2021**

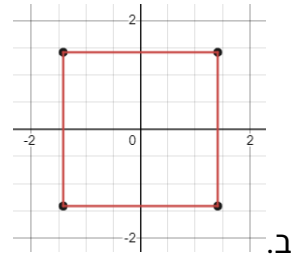
1. א.  $y^2 = 2x - 2a + 1$  ב.  $x^2 = 2y - 2a + 1$

ג.  $a = 0.5$  (1). ד.  $(0,0)$  (2). דלתון (3).

2. א.  $\vec{ED} = (1-t)\underline{v} - t\underline{u} + (t-1)\underline{w}$   $\vec{EB} = (1-t)\underline{u} - t\underline{v} + (t-1)\underline{w}$

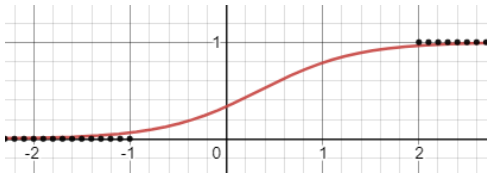
ב. (1) הוכחה (2). הוכחה ג.  $D(0,12,0)$   $S(0,0,12)$  ד.  $x - \sqrt{3}y = 0$

3. א.  $2cis45^\circ, 2cis135^\circ, 2cis225^\circ, 2cis315^\circ$

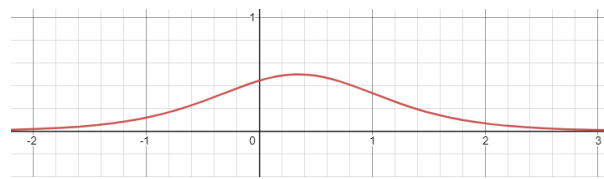


ג.  $(0, -2), (0, 2), (-2, 0), (2, 0)$  ד.  $n = 16, c = 65536, S = 12.25$  ה.

4. א. (1).  $y = 1$  (2). תחום עלייה: אף  $X$ , תחום ירידה: כל  $X$  (3).  $(0, 1+a)$



ב. (1) כל  $X$  (2).  $y = 0, y = 1$  (3).  $y = 0.5$



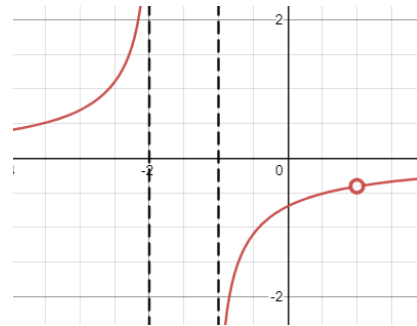
ג. (1)  $(\frac{\ln a}{2}, \frac{1}{2})$  (2)

ד.  $S = \frac{\ln a}{4} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2}$

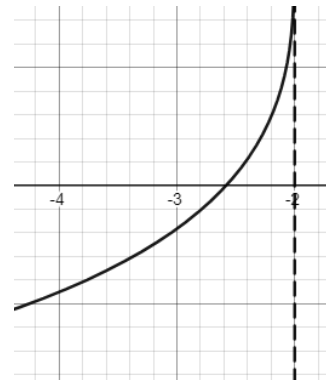
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח 5 ל"ג  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסנך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

5. א. (1)  $1 < x$  או  $-1 < x < 1$  או  $x < -2$ . (2)  $x = -1, x = -2, y = 0$ .

(3) תחום עליה:  $1 < x$  או  $-1 < x < 1$  או  $x < -2$ , תחום ירידה: אף  $X$



ב. (1)  $x < -2$ . (2) תחום עלייה:  $x < -2$ , תחום ירידה: אף  $X$



ג. לא, המכפלה שלילית בעבור כל  $X$  המקיים  $0 < f(x) < 1$

## מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!



## השאלות

שם לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה –  $\frac{1}{3}$  נקודות).

שם לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון פרמטר  $a$  שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה  $(a, -1)$  שווה למרחק שלהן מן הנקודה  $(-a, 1)$  הוא קו ישר. הבע את משוואת הישר באמצעות  $a$ .

נתון הישר  $y = -ax$ .

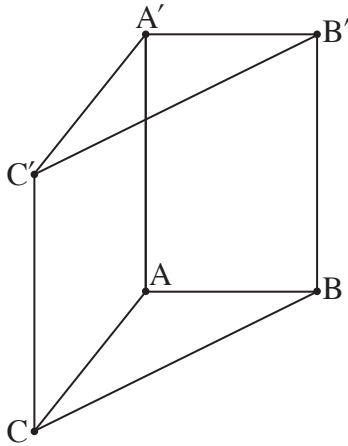
ב. מצא לאילו ערכים של  $a$ , הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א ניצבים זה לזה.

הישר שמצאת בסעיף א והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים,  $M$  ו- $N$ . מרכזי שני המעגלים מונחים על ציר ה- $x$ , המעגל  $M$  נמצא מימין לציר ה- $y$ , והמעגל  $N$  נמצא משמאל לציר ה- $y$ . נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6, והרדיוס של המעגל  $M$  גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל  $N$ .

ג. מצא את המשוואות של המעגלים  $M$  ו- $N$ .

נתון הישר  $-x + \sqrt{17}y - 8 = 0$ . הישר משיק לשני המעגלים  $M$  ו- $N$ .

ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.



2. בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה  $ABCA'B'C'$ , שהבסיס שלה הוא המשולש  $ABC$ .

נתון המספר  $k$  שבעבורו:  $\vec{AA'} = (k-1, k-7, k+1)$ ,

$\vec{AB} = (k-1, k, 3)$ ,  $\vec{AC} = (k+1, 0, k-3)$ .

א. מצא את ערכו של  $k$ .

המקצועות  $AC$  ו- $BC$  מונחים על הישרים  $\ell_{AC}$  ו- $\ell_{BC}$  בהתאמה:

$$\ell_{AC}: \underline{x} = (8, -1, -1) + t(k+1, 0, k-3)$$

$$\ell_{BC}: \underline{x} = (4, 0, 2) + m(k, -k, -4)$$

ב. מצא את משוואת המישור  $A'B'C'$ .

ג. חשב את גודל הזווית  $C'A'B'$ .

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש  $A'B'C'$ . נמק.

3. נתונה משוואה I:  $w^2 - 4iw - 4 + 2i = 0$ .  $w$  הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

נתונה משוואה:  $z^3 = a + bi$ .  $z$  הוא מספר מרוכב,  $a$  ו- $b$  הם מספרים ממשיים.

ידוע כי אחד הפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1-3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1.  $a = 0$ ,  $b > 0$

2.  $a < 0$ ,  $b = 0$

3.  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$

נתונה משוואה II:  $z^3 = 2(w_1 + w_2)$ ,  $w_1$  ו- $w_2$  הם הפתרונות של משוואה I.

ג. פתור את משוואה II.

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה  $u = di$ ,  $d$  הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את  $u$  לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של  $d$  שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים.

מצא את שתי האפשרויות.

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
(4) הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא אי־זוגית.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתון הישר:  $g(x) = a \cdot x$ ,  $a$  הוא פרמטר.

ידוע כי  $g(1) = f(1)$ .

- ג. (1) מצא את  $a$ .  
(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$  לבין הישר  $g(x)$ .

5. נתונה משפחת הפונקציות:  $f(x) = x \cdot (\ln(x))^n$ ,  $n \geq 1$ , הוא מספר טבעי.

א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור  $n$  זוגי ובעבור  $n$  אי-זוגי. אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות  $n$ .

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

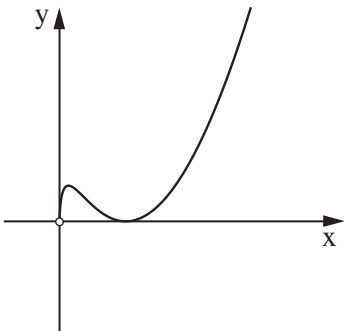
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

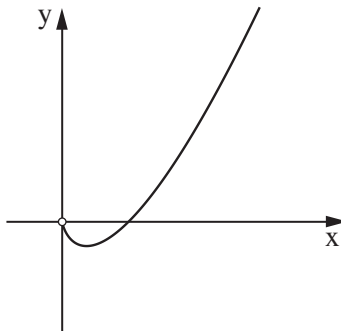
ב. כל אחד מן הגרפים א-ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.

קבע איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 1$ , איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 2$  ואיזה גרף יכול להתאים ל- $n = 3$ .

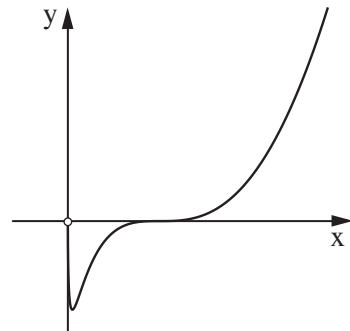
נמק את קביעותיך.



גרף ג



גרף ב



גרף א

נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{e}$  ו- $x = \frac{1}{e^2}$ .

**בהצלחה!**

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד מיוחד - קיץ תשפ"א - 9.6.2021**

1. א.  $y = ax$ , ב.  $a = \pm 1$ , ג.  $(x-4)^2 + y^2 = 8$ ,  $(2+x)^2 + y^2 = 2$

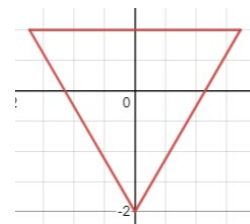
ד.  $x + \sqrt{17}y + 8 = 0$

2. א.  $k = 2$ , ב.  $x - 5y + 3z - 45 = 0$

ג.  $90^\circ$ , ד.  $(5, -5, 5)$

3. א.  $1+i$ ,  $-1+i3$ , ב. טענה 1

ג.  $2\text{cis}30^\circ$ ,  $2\text{cis}150^\circ$ ,  $2\text{cis}270^\circ$  או  $\sqrt{3}+i$ ,  $-\sqrt{3}+i$ ,  $-2i$



$d = -2, d$

4. א. (1) כל  $X$ , (2)  $x \rightarrow \infty : y = 1$ ,  $x \rightarrow -\infty : y = -1$ , (3) עלייה: כל  $X$ , ירידה: אין

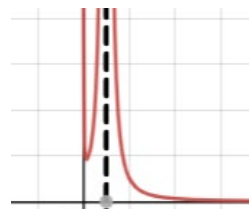


ב. (4) הוכחה, ג. (1) 0.761, (2) 0.106

5. א. (1)  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$  אי זוגי: עלייה:  $x > \frac{1}{e^n}$ , ירידה:  $0 < x < \frac{1}{e^n}$

עבור  $m$  זוגי: עלייה:  $0 < x < \frac{1}{e^n}$  או  $x > 1$ , ירידה:  $\frac{1}{e^n} < x < 1$  (3) עבור  $m$  אי זוגי:

$(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n})$  מינימום, עבור  $m$  זוגי:  $(1, 0)$  מינימום,  $(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n})$  מקסימום



ד. 0.5

ב. גרף א':  $n=3$ , גרף ב':  $n=1$ , גרף ג':  $n=2$

## מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך —  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

## השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה –  $\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

### פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

#### מספרים מרוכבים

1. לפניך משוואת הפרבולה:  $y^2 = 2ax$  ומשוואת המעגל:  $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$ . הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל. הבע באמצעות  $a$ , אם יש צורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.

ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות  $a$ , אם יש צורך.

ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא  $2\sqrt{5}$ .

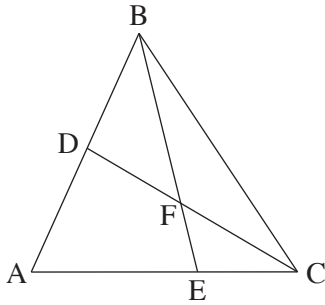
ג. (1) הבע באמצעות  $a$  את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

(2) מצא את  $a$ .

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב-2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש שווה למרחק שלהן

מן הישר  $x = -4$ .



2. נתון משולש ABC (ראה סרטוט).

הנקודה D היא אמצע הצלע AB.

הנקודה E מחלקת את הצלע AC ביחס של  $AE : EC = 2 : 1$ .

הנקודה F היא מפגש הקטעים BE ו-CD.

נסמן:  $\vec{CA} = \underline{u}$ ,  $\vec{CB} = \underline{v}$

$k$  ו- $t$  הם מספרים כך ש:  $\vec{CF} = k \cdot \vec{CD}$ ,  $\vec{BF} = t \cdot \vec{BE}$ .

א. מצא את  $t$  ואת  $k$ .

המשולש ABC נמצא במישור  $4x + 2y + z - 12 = 0$ .

מישור זה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A, את ציר ה- $y$  בנקודה C

ואת ציר ה- $z$  בנקודה B. הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו- F.

ג. מצא את משוואת המישור AOE.

ד. מצא את נפח הפירמידה FAOE.

3. נתונה משוואה I:  $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ .  $z$  הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II:  $(a \cdot z^2 + b)(z + 1) = 0$ .  $z$  הוא מספר מרוכב,  $a$  ו- $b$  הם מספרים ממשיים השונים מאפס.

ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי  $a \cdot b > 0$ .

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות  $a$  ו- $b$ , אם יש צורך.

ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים

והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I.

ה. מצא את היחס  $\frac{b}{a}$ .



## פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{(bx^2 - 2bx)} - 1$  המוגדרת לכל  $x$ .  $b < 0$  הוא פרמטר. הבע את תשובותיך באמצעות  $b$ , אם יש צורך.

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לציר ה- $x$  (אם יש כאלה).
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נגדיר את הפונקציה:  $g(x) = f(x + a)$ ,  $a$  הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה  $g(x)$  יש נקודת קיצון על ציר ה- $y$ .

- ב. (1) מצא את  $a$ , ובטא את הפונקציה  $g(x)$  באמצעות  $x$  ו- $b$ .
- (2) האם הפונקציה  $g(x)$  היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- ג. מצא את שיעור ה- $x$  של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת  $g'(x)$ , וקבע את סוגן.
- ד. הצב  $b = -0.5$ , וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת  $g'(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של  $g'(x)$  ומאונכים לציר ה- $x$ .

5. נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \cdot x^2 - x^3$  המוגדרת לכל  $x$ ,  $a$  הוא פרמטר. ענה על סעיפים א-ג עבור  $0 < a$ . הבע את תשובותיך באמצעות  $a$ , אם יש צורך.
- א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$ .  
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
נתונה הפונקציה:  $g(x) = \ln(f(x))$ .
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .  
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבע את סוגה.
- ג. נתון כי לגרף הפונקציה  $g(x)$  יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- $x$ .  
(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .  
(2) מצא את טווח הערכים האפשריים של  $a$  שעבורם גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד.  
ענה על סעיף ד עבור  $a = 0$ .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ . ציין בגרף את הערכים המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

**בהצלחה!**

**5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד ב' - קיץ תשפ"א - 8.7.2021**

1. א.  $y = \sqrt{ax}$ . ב.  $(0,0), (2,2\sqrt{a}), (2,-2\sqrt{a})$ .

ג. (1) מרכז המעגל:  $(a+1, 0)$  והרדיוס הינו  $(a+1)$ . (2)  $a = 4$ .

ד.  $y^2 = 18x$ .

2. א.  $k = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{4}$ . ב.  $E(1,4,0), F(\frac{3}{4}, 3, 3)$ .

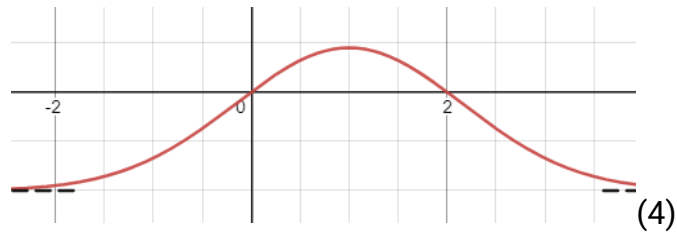
ג.  $V = 6$ . ד.  $z = 0$ .

3. א.  $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

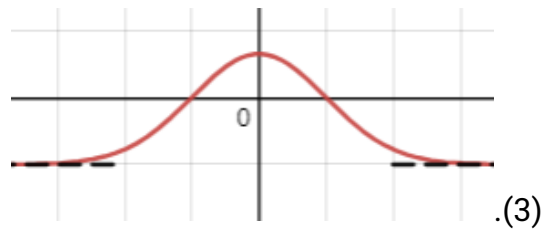
ב.  $\frac{b}{a} = 8$ . ה.  $z = -\sqrt{\frac{b}{a}}i, z = \sqrt{\frac{b}{a}}i, z = -1$ . ג. הוכחה. ד.  $s = 2\sqrt{3}$ .

4. א. (1)  $(0,0)$ , (2)  $(2,0)$ . אס' אנכית: אין, אס' אופקית:  $y = -1$ .

(3) נקודת מקסימום ב  $(1, e^{-b} - 1)$ .



ב. (1)  $a = 1$ . (2) הפונקציה  $g(x)$  זוגית.

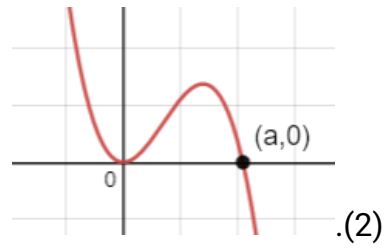


ג. נקודת מינימום כש  $x = \sqrt{-\frac{1}{2b}}$ , נקודת מקסימום כש  $x = -\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ .

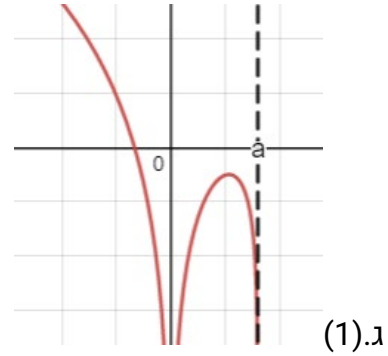
ד.  $s = 2(\sqrt{e} - 1) = 1.297$ .

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ביח"ל**  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

5. א.(1). תחום חיוביות:  $0 < x < a$  או  $x < 0$ , תחום שליליות:  $a < x$



ב.(1)  $x < a, x \neq 0$  (2)  $x = a, x = 0$  (3) נקודת מקסימום ב  $(\frac{2a}{3}, \ln(\frac{4}{27}a^3))$



(2)  $0 < a < 1.889$

