

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

כיתה ט' - יחידה 18 - מקביליות מיוחדות

מלבן - מעוין - ריבוע

מלבן

הגדרה: מרובע שכל זוויותיו ישרות

מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו שוות, כמו כן הוא משתייך למשפחת המקביליות וגם למשפחת טרפזים שווה שוקים.

למלבן 4 צלעות 2 מהן נקראות רוחב ו-2 האחרות נקראות אורך, כאשר זוג צלעות סמוכות שוות אז המרובע הוא ריבוע (מקרה פרטי של מלבן).

תכונות המלבן

מלבן מקיים את כל תכונות המקבילית:

צלעות נגדיות שוות ומקבילות:

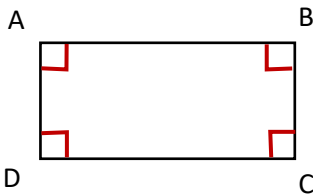
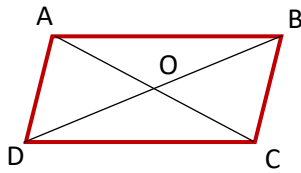
$$AB = DC, AD = BC \text{ ו- } AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

זוויות נגדיות שוות

$$\sphericalangle A = \sphericalangle C, \sphericalangle B = \sphericalangle D$$

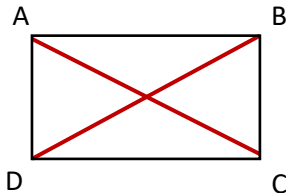
אלכסונים חוצים זה את זה:

$$AO = CO, DO = BO$$



במלבן כל הזוויות שוות 90 מעלות

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$$



במלבן האלכסונים שווים זה לזה

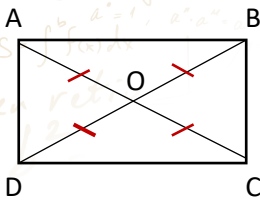
$$AB = DB$$

*ניתן לשים לב שהמלבן סימטרי לפי ציר אנכי העובר בנקודת מפגש אלכסונו

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורג

מסקנות נוספות שניתן ללמוד על המלבן מתכונותיו:

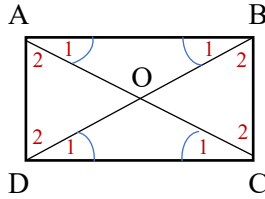
1. אלכסונים במלבן חוצים זה את זה ושווים ולכן גם חצאי האלכסונים שווים באורכם
 $AO = BO = DO = CO$



2. מסעיף 1 מתקבל ש:

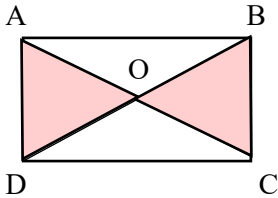
$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_1 = \sphericalangle D_1$$

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle B_2 = \sphericalangle C_2 = \sphericalangle D_2$$



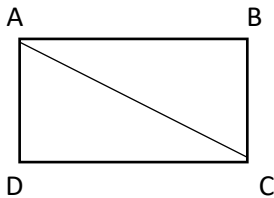
3. אלכסוני המלבן מחלקים את המלבן ל-4 משולשים שווים שוקיים ושווי שטח

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD} = S_{\Delta AOD}$$



4. כל אחד מאלכסוני המלבן מחלקים את המלבן ל-2 משולשים ישרי זווית חופפים, ניתן לחשב את אורך האלכסון בעזרת משפט פיתגורס

$$\Delta ACB \cong \Delta ACD$$

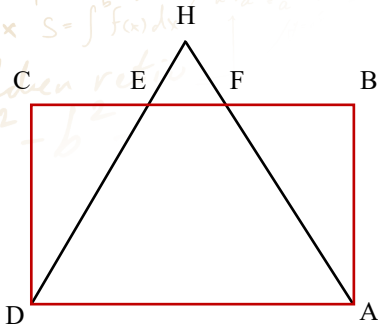


מלבן - תרגילים

1. נתון מלבן ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלע CB ש-

$$CE = FB$$

הוכיחו ש- $HE = HF$.



2. נתון מלבן ABCD מעבירים שני קטעים מהנקודות C ו-D ומגיעים לנקודות P ו-N בהתאמה.

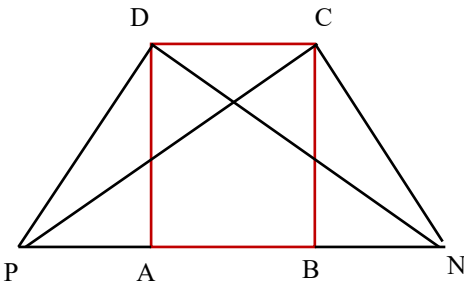
ידוע שהנקודות N, P, A, B נמצאות על ישר אחד. (כמתואר

בשרטוט).

נתון: $PA = NB$.

א. הוכיחו ש- $DP = CN$.

ב. הוכיחו ש: $DN = PC$.



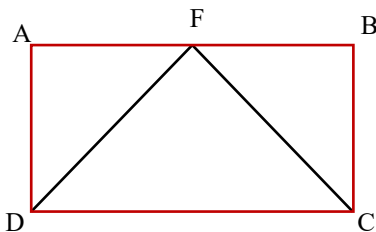
3. נתון ABCD מלבן.

הנקודה F נמצאת על צלע AB כך ש:

DF - חוצה את זווית D

FC חוצה את זווית C

הוכיחו ש- $AB=2BC$



4. נתון: ABCD מלבן, העבירו את הקטעים AM ו-BN.

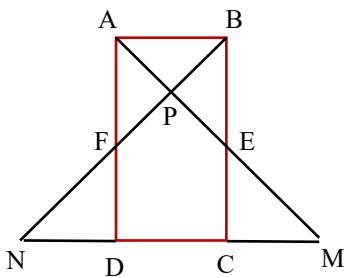
הנקודות C, D, N ו-M נמצאות על ישר אחד.

נתון שהקטעים AM ו-BN חוצים בהתאמה את הצלעות BC ו-AD

א. הוכיחו ש- $\angle AFB = \angle BEA$

ב. הוכיחו ש- $CM=ND$

ג. הוכיחו ש- $BP=AP$

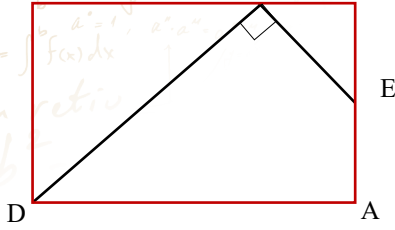


5. נתון מלבן ABCD הנקודות E ו-H נמצאות על הצלעות

AB ו-BC בהתאמה כך ש- $BE = BH$.

א. חשבו את גודל זווית AEH.

ב. הוכיחו ש- $HC = CD$.



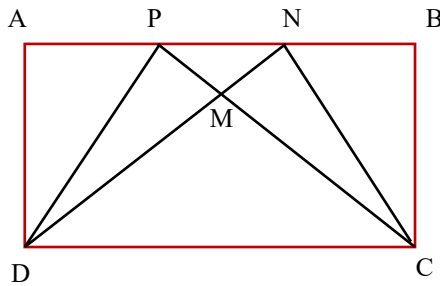
6. במלבן ABCD מעבירים שני קטעים בתוך המלבן היוצאים מהנקודות C ו-D ומגיעים לנקודות P ו-N

בהתאמה ונפגשים בנקודה M (כמתואר בשרטוט). נתון

$PM = NM$.

ג. הוכיחו ש- $DP = CN$.

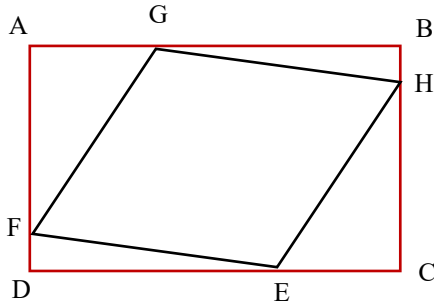
ד. הוכיחו ש: $\sphericalangle ADP = \sphericalangle BCN$.



7. נתון ABCD מלבן. הנקודות G, H, E, F נמצאות על צלעות

המלבן כך ש: $AG = EC, BH = DF$.

הוכח: מקבילית FGHE.

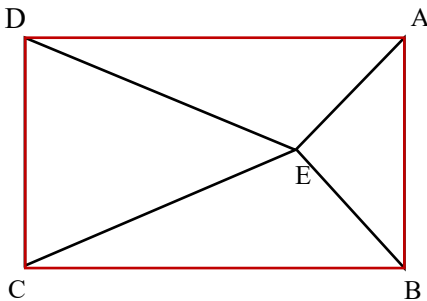


8. נתון: מלבן ABCD, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCE$.

א. הוכיחו $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EBA$.

נתון: $\sphericalangle AEB = 90^\circ$.

ב. האם ניתן לחשב את זווית DEC? נמקו.



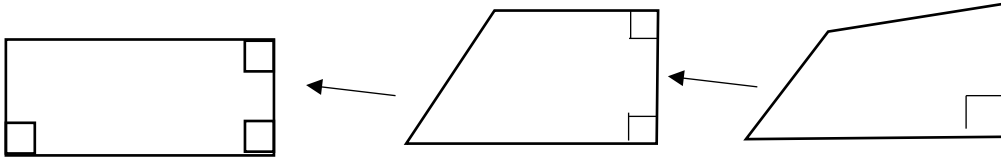
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

תנאים מספיקים להוכחת מלבן

על מנת להוכיח שמרובע הוא מלבן ניתן להשתמש בכמה תנאים מספיקים

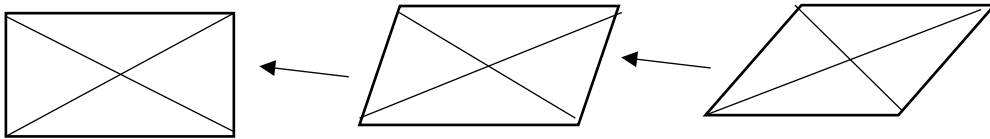
מרובע << למלבן

מרובע ששלוש מזוויותיו שוות 90 מעלות הוא מלבן

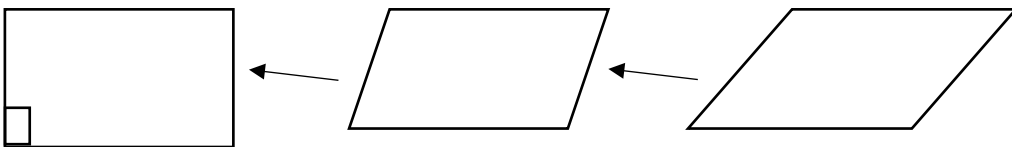


מקבילית << למלבן

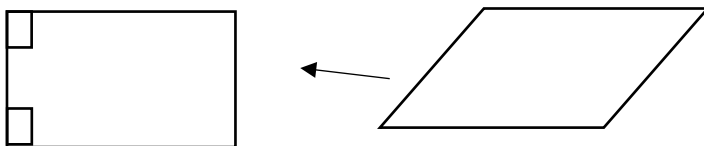
מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.



מקבילית שבה יש זווית ישרה אחת היא מלבן.



מקבילית שבה זוויות סמוכות שוות היא מלבן



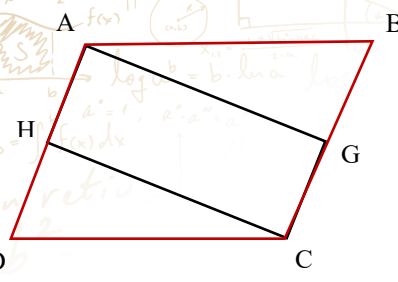
דוגמה לדרך פתרון

נתון: ABCD מקבילית, הנקודה E נמצאת על אמצע הצלע AB כך ש-
EC=DE.

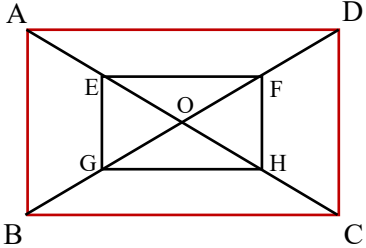
הוכיחו ABCD מלבן

נימוק	טענה	
נתון	ABCD מקבילית	1
צלעות נגדיות במקבילית שוות	CB=AD	2
נתון	AE = EB	3
נתון	EC = DE	4
לפי צלע, צלע, צלע	$\triangle DAE \cong \triangle CBE$	5
זוויות מתאימות במשולשים חופפים	$\sphericalangle A = \sphericalangle B$	6
מקבילית שבה זוויות סמוכות שוות את המקבילית היא מלבן	ABCD מלבן	7

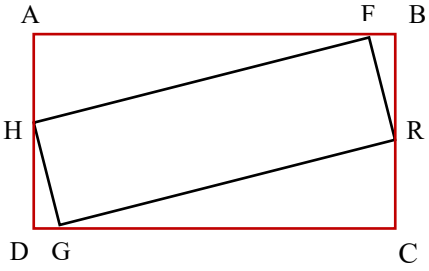
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורג אוגוסט קליין



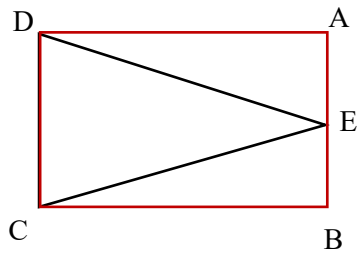
9. במקבילית ABCD העבירו קטע AG המאונך לצלע AD וקטע CH כך ש- $HD = GB$. הוכיחו שהמרובע AGCH מלבן.



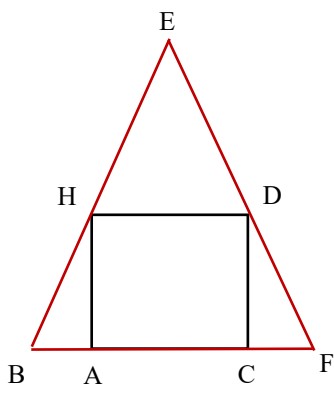
10. נתון: מלבן ABCD נתון $AE=HC$ ו- $FD=BG$ הוכח EGFH מלבן



11. נתון: מלבן ABCD, הנקודות F, H, R, G נמצאות על צלעות המלבן כך ש: $DG = FB$, $DH = BR$ ו- $HG \perp GR$. הוכיחו שהמרובע FRGH מלבן.



12. נתון: מקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על אמצע הצלע AB כך ש- $DE = EC$. הוכיחו ABCD מלבן.

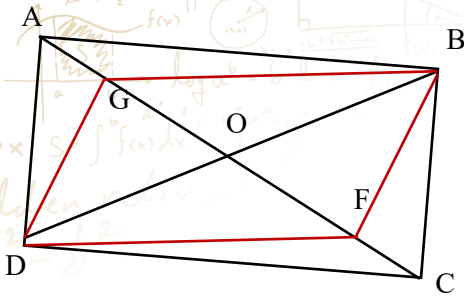


13. נתון משולש EBF שווה שוקיים, $\angle E = 40^\circ$ ו- $\angle EHD = 70^\circ$.
א. הוכיחו ש- HD מקביל ל- BF.
ב. נתון $CF = BA$, הוכיחו $HA = DC$.
ג. נתון $\angle BHA = 20^\circ$, הוכיחו ACDH מלבן.

14. נתונה מקבילית DGBF.

המשיכו את קצוות אלכסון GF עד לנקודות A ו-C כך ש-
 $OA=OB=OC$

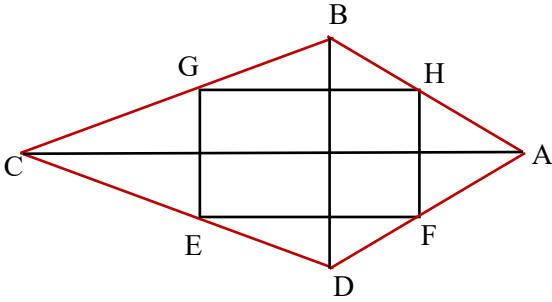
הוכיחו שהמרובע ABCD מלבן.



15. נתון: דלתון ABCD.

המרובע GHFE חסום בדלתון כך ש:
 $AC \parallel GH \parallel EF$ ו- $BD \parallel GE \parallel HF$

הוכח EGHF מלבן

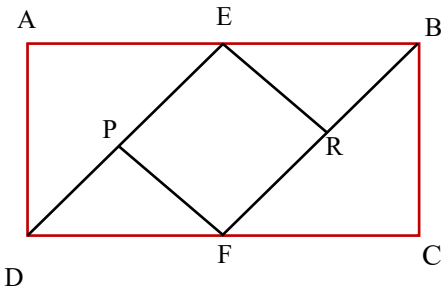


16. נתון: מלבן ABCD

הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-DC בהתאמה כך ש-
ED חוצה זווית D
FB - חוצה זווית B.
הנקודות P ו-R נמצאות על הקטעים DE ו-BF בהתאמה כך ש-

$BR=ER$ ו- $PF=PD$

הוכיחו שמרובע ERFP מלבן.

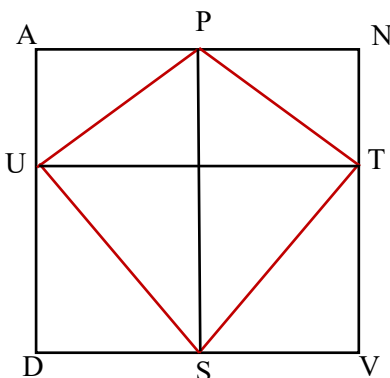


17. נתון: PTUS הוא דלתון החסום במרובע NVDA.

אלכסוני הדלתון מקבילים לצלעות המרובע כך ש:

$PS \parallel AD \parallel NV$ ו- $UT \parallel AN \parallel DV$

הוכיחו שהמרובע FRGH מלבן.

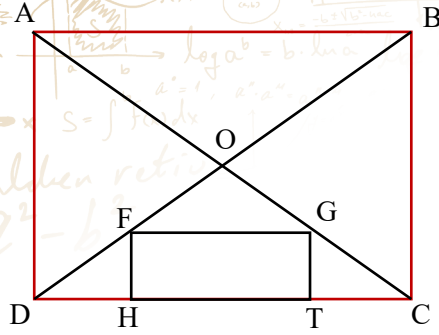


לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

18. נתון מלבן ABCD.

- הנקודות F ו-G נמצאות על אלכסוני המלבן כך ש-
AB ו-DC בהתאמה כך ש-
FD=FO ו-**GC=OG** (נקודת מפגש האלכסונים).
- בנוסף, הנקודות T ו-H נמצאות על BC כך ש-
AB ו-DC בהתאמה כך ש-**FH || AD**

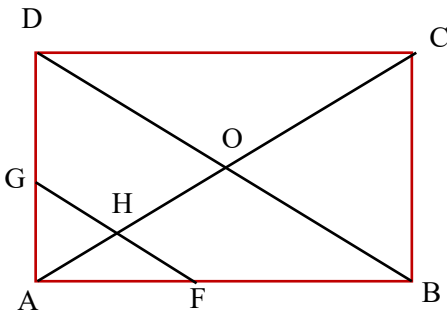
הוכיחו שהמרובע ABCD מלבן.



19. נתון מרובע ABCD.

- הקטע GF חותך את צלעות AD ו-AB בנקודות G ו-F בהתאמה. האלכסון AC חוצה את BD בנקודות O ו-H.
- נתון בנוסף ש: $\angle C = 90^\circ$ ו- $DB \parallel GF$, $HF=AH$

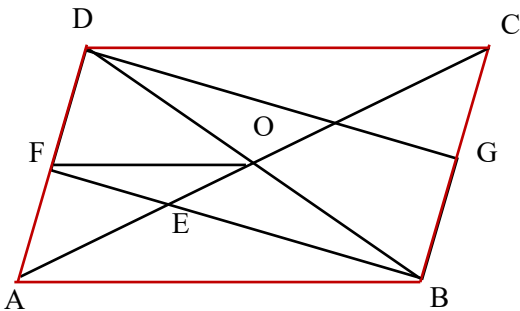
הוכיחו שמרובע ABCD מלבן



20. נתונה מקבילית ABCD.

- הנקודה F נמצאת על הצלעות AD
- הנקודה G נמצאת על הצלעות BC
- נתון: $\angle OFB = \angle OBF$ ו- $DG \parallel FB$

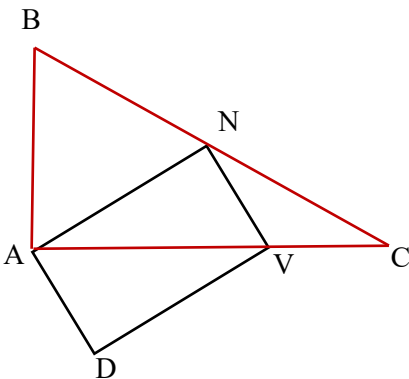
הוכיחו שמרובע DGBF מלבן.



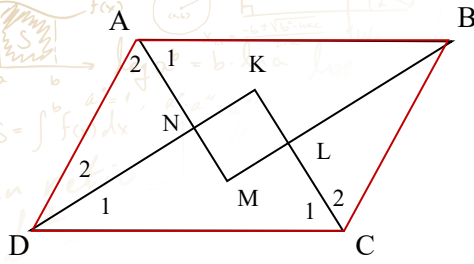
21. נתון משולש ישר זווית BAC ($\angle A = 90^\circ$).

- הנקודה N נמצאת על הצלע BC והנקודה V על הצלע AC.
- מנקודה D הנמצאת מחוץ למשולש העבירו את הקטעים AD ו-VD.
- נתון: $DF=EC=AE$ ו- $\angle C = \angle AVD$, $\angle CAD = \angle BAN$

הוכיחו שהמרובע NVDA מלבן.



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד



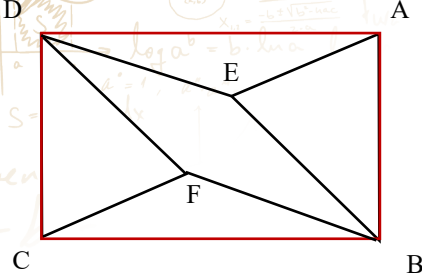
22. נתון משולש EBF שווה שוקיים, $\sphericalangle E = 40$ ו-
 $\sphericalangle EHD = 70$.
 ד. הוכיחו ש- HD מקביל BF.
 ה. נתון $CF = BA$, הוכיחו $HA = DC$.
 ו. נתון $\sphericalangle BHA = 20$, הוכיחו ACDH מלבן.

פתרון מלא לתרגילי הוכחה

במקבילית ABCD העבירו את 4 חוצי זווית (MA,MB,KC,KD)

הוכיחו שהמרובע KLMN הוא מלבן

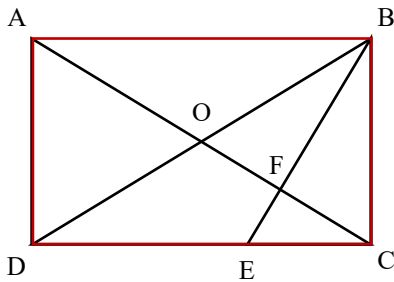
נימוק	טענה	
נתון	ABCD מקבילית	1
נתון	$\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2 = \alpha$	2
נתון	$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \beta$	3
סכום זוויות סמוכות במקבילית שווה 180	$\sphericalangle D = \sphericalangle A = 180$	4
הצבה וחישוב	$\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 + \sphericalangle D_1 + \sphericalangle D_2 = 180$ $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180$ $2\alpha + 2\beta = 180$ $\alpha + \beta = 90$	5
סכום זוויות במשולש	$\sphericalangle A_2 + \sphericalangle D_2 + \sphericalangle AND = 180$	6
חישוב	$\sphericalangle AND = 90$	7
זוויות קודקודיות	$\sphericalangle AND = \sphericalangle KNM = 90$	8
באותו אופן שהוכחנו את 8	$\sphericalangle KLM = 90$	9
זוויות נגדיות במקבילית שוות	$\sphericalangle C = \sphericalangle A$	10
כלל המעבר	$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle A_1 = \beta$	11
סכום מעלות במשולש 180 מעלות הוכחנו $\beta + \alpha = 90$	$\sphericalangle C_1 + \sphericalangle D_1 + \sphericalangle DKC = 180$ $\beta + \alpha + \sphericalangle DKC = 180$ $\sphericalangle DKC = 90$	12
מרובע שבו 4 זוויות ישרות הוא מלבן (9,12 ו-7)	KLMN מלבן	13



23. נתונה מקבילית DEBF בנוסף ידוע ש:

$$\angle C = 90^\circ, \angle DCF = \angle DFC = \angle AEB = \angle EAB$$

הוכיחו שהמרובע ABCD מלבן.

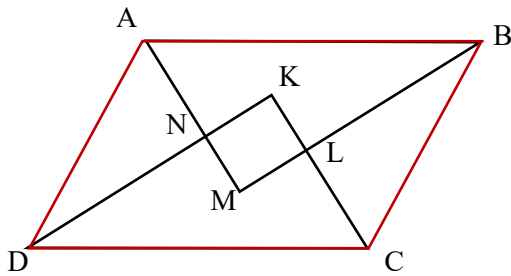


24. במלבן ABCD נתון:

$$\angle ABO = \angle DBE, AC \text{ מאונך לאלכסון } BE$$

א. חשבו את זווית $\angle AOB$.

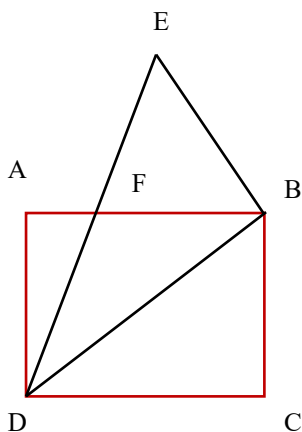
ב. נתון: $FC = 5$ ס"מ, מצאו את היקף AOD.



25. במקבילית ABCD העבירו את 4 חוצי זווית

(MA, MB, KC, KD).

הוכיחו שהמרובע KLMN הוא מלבן.

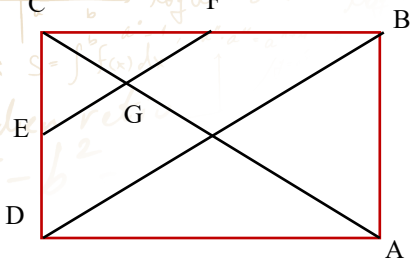
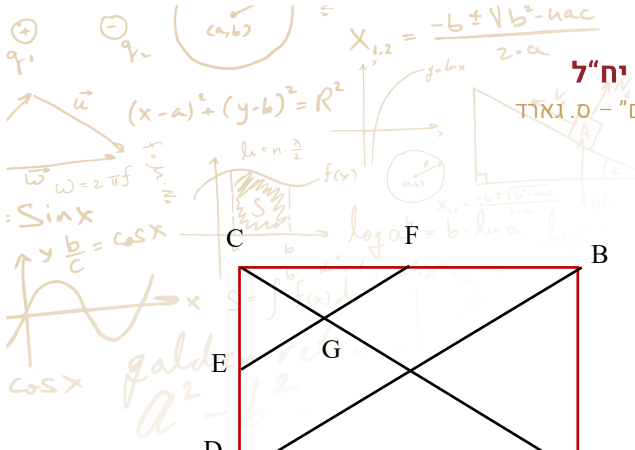


26. נתון: מלבן ABCD, DB אנך ל-BE,

DB חוצה את זווית $\angle EDC$.

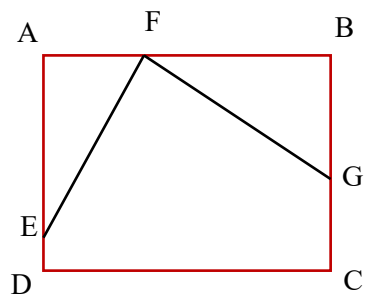
א. הוכיחו $DF = FE$.

ב. נתון: $FD = EB$. מצאו את זווית $\angle ADF$.

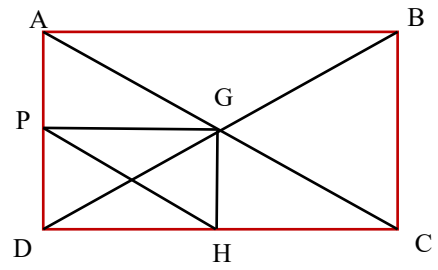


27. נתון מלבן ABCD, ידוע ש- $GC = EG$.
 א. הוכיחו $GC = GF$.
 ב. הוכיחו $EF \parallel BD$.

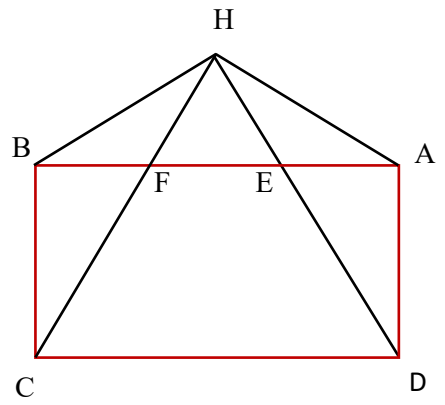
28. הוכיחו את המשפטים הבאים:
 א. האלכסונים במלבן שווים זה לזה.
 ב. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.



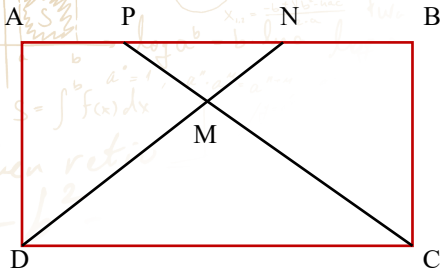
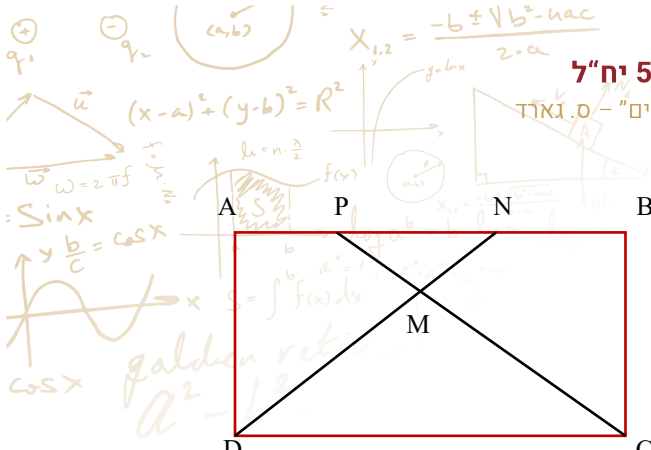
29. הנקודות E, F, G נמצאות על צלעות המלבן ABCD.
 נתון: $FA = BG$, $\angle EFB = \angle FGC$.
 הוכח: EF אנך ל-GF.



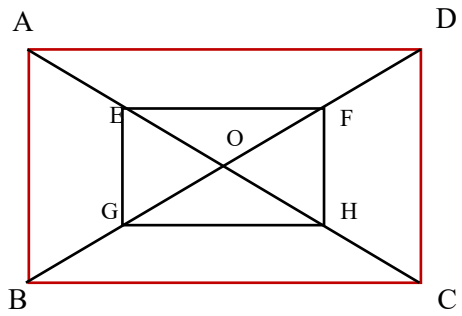
30. נתון מלבן הנקודה G היא נקודת מפגש האלכסונים.
 הנקודה P נמצאת על אמצע הצלע AD והנקודה H נמצאת על אמצע הצלע DC.
 א. הוכיחו שמרובע PGHD הוא מלבן.
 ב. הוכיחו שהקטע PH מקביל לאלכסון AC.



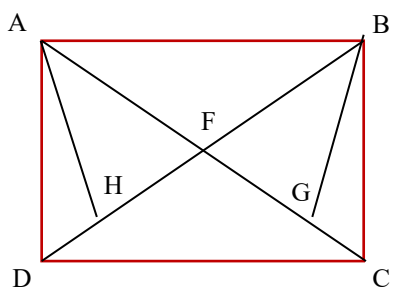
31. נתון מלבן ABCD, בנוסף נתון ש- $HD = CH$.
 א. הוכיחו: $AH = BH$.
 נתון: $\angle DEB = 120$.
 ב. הוכיחו משולש FHE שווה צלעות.
 נתון: $AE = FE$.
 ג. הוכיחו $FE = BF$.
 ד. מה גודל זווית $\angle BHA$?



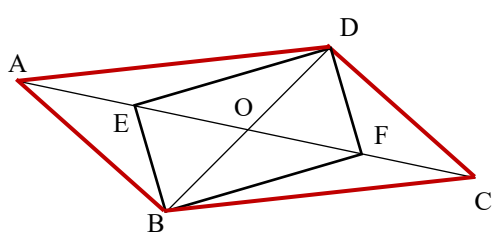
32. במלבן ABCD מעבירים שני קטעים בתוך המלבן היוצאים מהנקודות C ו-D ומגיעים לנקודות P ו-N בהתאמה ונפגשים בנקודה M (כמתואר בשרטוט). נתון $PM = NM$. ה. הוכיחו ש- $AP = NB$. ו. נתון: $\sphericalangle ADN = 58^\circ$, מצאו את גודל זווית $\sphericalangle PMD$.



33. נתון: מלבן ABCD נתון $AH=EC$ ו- $FD=BG$ הוכח EGHF מלבן



34. נתון: מלבן ABCD א. הוכח $DH=CG$. ב. נתון: $DE=FC$. הוכח שהמשולשים DCE ו- CDF חופפים.



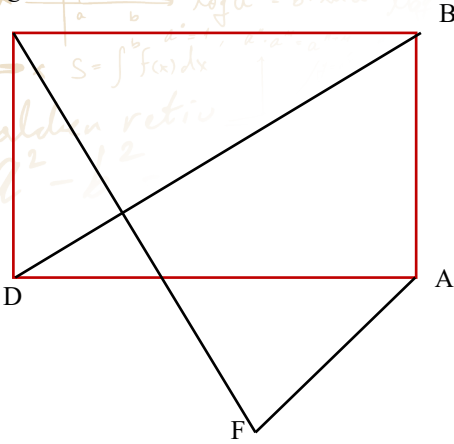
35. המרובע ABCD היא מקבילית שאלכסוניה נפגשים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle EDA = 18^\circ$, $\sphericalangle BOC = 116^\circ$ וזווית $\sphericalangle DAE = 22^\circ$. א. הוכיחו שמרובע EDFB הוא מלבן. ב. נתון $DF=FC$, מצאו את זוויות המקבילית

36. נתון מלבן ABCD.

מקודקוד C העבירו קטע CF המאונך לאלכסון BD ושווה לאורך של BD.

א. הוכיחו ש- $\angle CBD = \angle DCF$

ב. הוכיחו ש- $\angle FAD = 45^\circ$



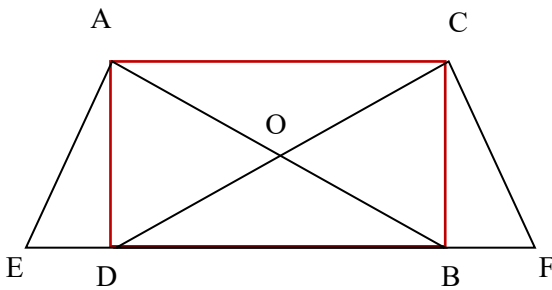
37. נתון במרובע ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.

ידוע ש: $BO = DO$ ו- $AC = DB$.

המשיכו את הצלע DB משני הצדדים עד לנקודות E ו-F

כך ש: $ED = BF$ ו- $\angle E = \angle F$.

הוכיחו שמרובע ABCD הוא מלבן



38. נתון מלבן ABCD, מקודקוד C העבירו קטע CF

הפוגש את המשך הצלע DA בנקודה F וחוצה את

זווית BCA

א. הוכיחו ש- $BD = AF$

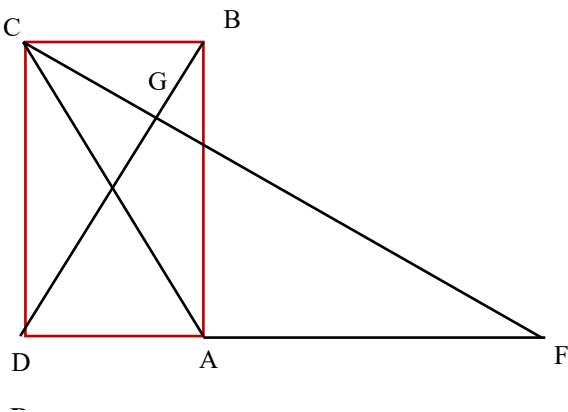
נתון: AC חוצה את זווית DCF

ב. הוכיחו ש- $CF \perp DB$

אלכסון DB והקטע CF נפגשים בנקודה G כך

שאורך הקטע CG הוא $\frac{1}{4}$

ג. חשבו את אורך הקטע CF



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

מקביליות - מעוין (Rhombus)

מעוין הגדרה: מרובע שכל צלעותיו שוות

מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות, כמו כן הוא משתיך למשפחת מקביליות ודלתונים.

כאשר מעוין יש זווית ישרה אז הוא ריבוע, או ששתיים מזוויותיו שוות.

יחידה 1: תכונות המעוין

מעוין מקיים את כל תכונות המקבילית:

צלעות נגדיות שוות ומקבילות:

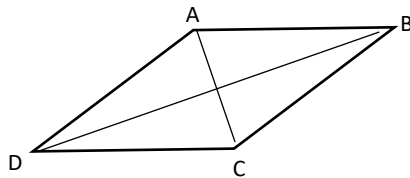
$$AB = DC, AD = BC \text{ ו- } AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

זוויות נגדיות שוות

$$\sphericalangle A = \sphericalangle C, \sphericalangle B = \sphericalangle D$$

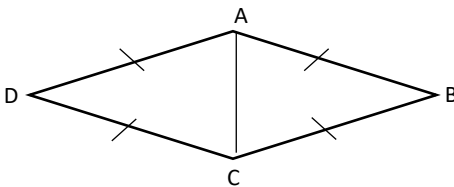
אלכסונים חוצים זה את זה:

$$AO = CO, DO = BO$$



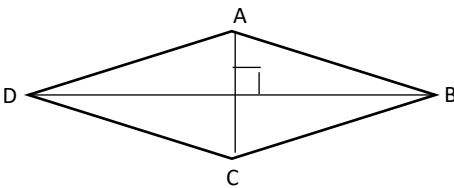
כל צלעות המעוין שוות באורכן

$$AB = BC = CD = AD$$



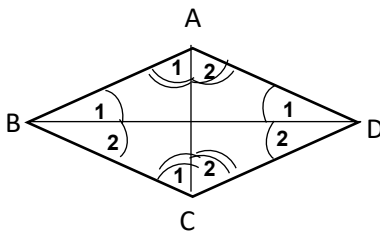
אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה

$$CA \perp DB$$



אלכסוני המעוין חוצים את זוויות המעוין

$$\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2, \sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2, \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2, \sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$$

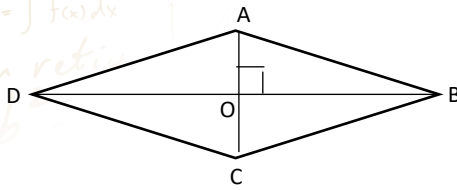


לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

מסקנות שניתן להסיק מהמשפטים:

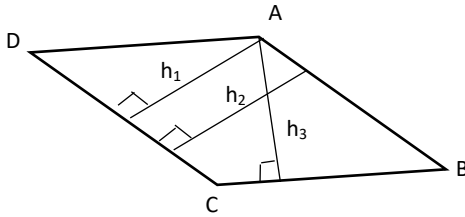
אלכסוני המעוין יוצרים 4 משולשים ישרי זווית חופפים:

$$\Delta ABO \cong \Delta CBO \cong \Delta DCO \cong \Delta ADO$$



אורכי כל הגבהים במעוין שווים

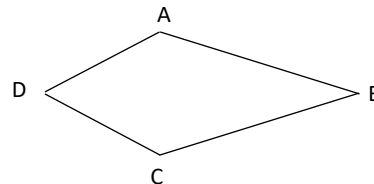
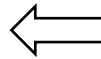
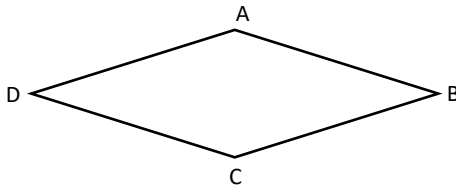
$$h_1 = h_2 = h_3$$



מעוין - מקרה פרטי של דלתון

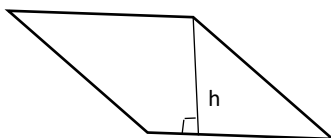
מעוין: $DC=AD=AB=CB$

דלתון: $DC=AD$ ו- $AB=CB$

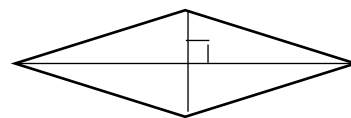


בניות עזר במעוין

גובה



אלכסונים

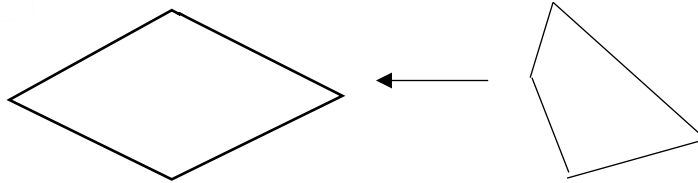


לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

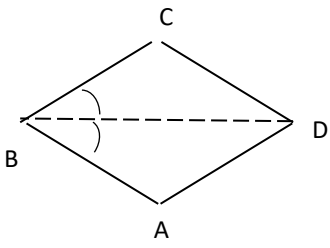
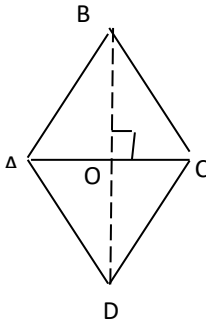
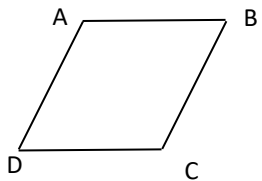
תנאים מספיקים להוכחת מעוין

ממרוב למעוין

אם במרובע כל הצלעות שוות אז המרובע הוא מעוין



ממקבילית למעוין

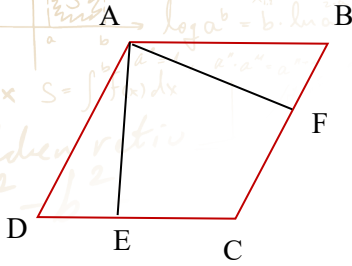
אם במקבילית צלעות סמוכות שוות אז המקבילית היא מעוין	אם במקבילית האלכסונים מאונכים זה לזה אז המקבילית היא מעוין	אם במקבילית האלכסונים חוצים אז הזוויות אז המקבילית היא מעוין
נתון: ABCD מקבילית $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$	נתון: ABCD מקבילית $AC \perp BD$	נתון: ABCD מקבילית, $CB=AB$
אז ABCD הוא מעוין	אז ABCD הוא מעוין	אז ABCD מעוין
		

משפטי הוכחה	תכונות
אם במרובע כל הצלעות שוות אז המרובע הוא מעוין	כל הצלעות במעוין שוות
אם במקבילית צלעות סמוכות שוות אז המקבילית היא מעוין	כל הצלעות במעוין שוות
אם במקבילית האלכסונים מאונכים זה לזה אז המקבילית היא מעוין	אלכסונים במעוין מאונכים זה לזה
אם במקבילית האלכסונים חוצים אז הזוויות אז המקבילית היא מעוין	אלכסוני המעוין חוצים את זוויות המעוין

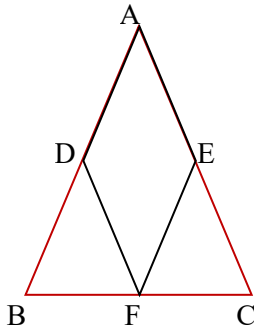
יחידה 5 – דוגמאות לפתרון מלא

במרובע ABCD מעוין נתון: AF אנך ל-BC, AE אנך ל-DC.

הוכיחו: $\angle D = \angle EAF$



נימוק	טענה	
נתון	ABCD מעוין	1
נתון	$\angle AEC = \angle AFC = 90$	2
זוויות נגדיות במעוין שוות	$\angle D = \angle B = \alpha$	3
סכום זוויות סמוכות במעוין שווה 180 מעלות	$\angle C = 180 - \alpha$	4
סכום זוויות במרובע 360 מעלות	$\angle AEC + \angle AFC + \angle C + \angle EAF = 360$	5
הצבה	$90 + 90 + 180 - \alpha + \angle EAF = 360$	6
חישוב	$\angle EAF = \alpha$	7
כלל המעבר	$\angle EAF = \angle D$	8



המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB=AC).

המרובע AEDF הוא מקבילית.

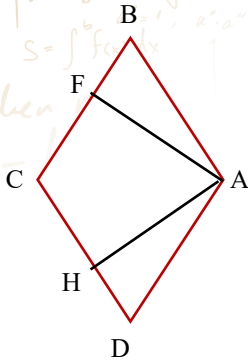
נתון: BF=FC.

הוכח שהמרובע AEDF הוא מעוין.

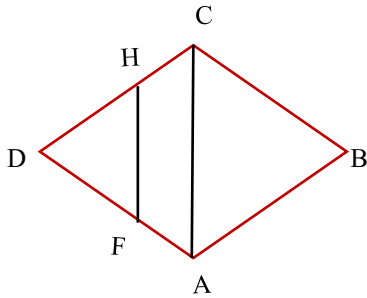
נימוק	טענה	
נתון	ADFE מקבילית	1
זוויות נגדיות במקבילית שוות	$\angle ADF = \angle AEF$	2
זוויות צמודות לזוויות שוות, שוות בעצמן	$\angle BDF = \angle CEF$	3
נתון	משולש ABC שווה שוקיים	4
זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים שוות	$\angle B = \angle C$	5
אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי זוויות אז הזווית השלישית שווה גם כן.	$\angle DFB = \angle EFC$	6
נתון	FB = FC	7
לפי זווית צלע זווית (5, 6, 7)	$\triangle BDF \cong \triangle CEF$	8
צלעות מתאימות במשולשים חופפים	EF=DF	9
אם במקבילית יש צלעות סמוכות שוות אז המקבילית היא מעוין	AEFD מעוין	10

מעוין - תרגילים

39. נתון במעוין ABCD ש- AF ו- AH הם גבהים לצלעות BC ו- DC בהתאמה.
הוכיחו ש- $HD = FB$.

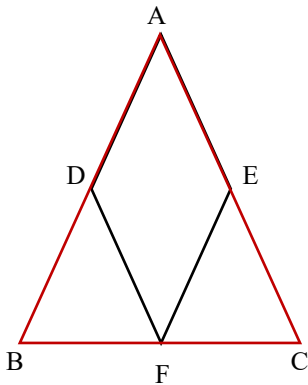


40. נתון במעוין ABCD שהנקודות H ו- F נמצאות על הצלעות AD ו- DC בהתאמה כך ש- $CH = AF$.

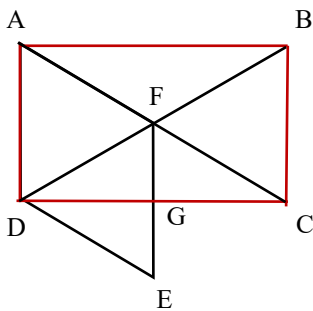


הוכיחו ש- HFIICA.

41. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
המרובע AEFD הוא מקבילית.
נתון: $BF = FC$.
הוכח שהמרובע AEFD הוא מעוין.

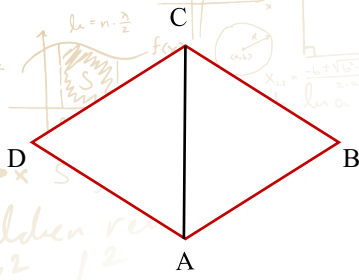


42. נתונים: מלבן ABCD ומעוין AFED. קודקוד F נמצא על מפגש האלכסונים של מלבן ABCD. $FC = BC$.

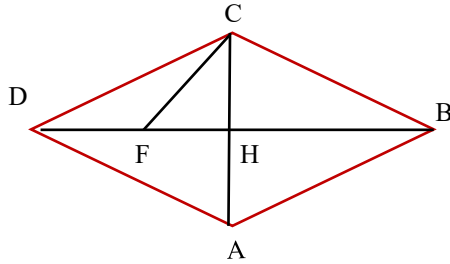


חשבו את הזווית $\sphericalangle GDE$.

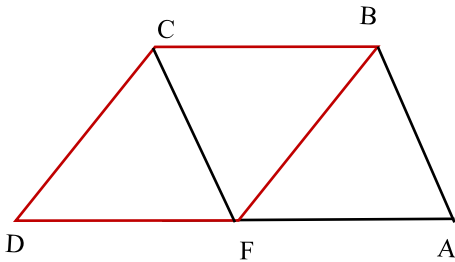
43. נתון שאלכסון AC במעוין ABCD שווה לצלע המעוין.
חשבו את זוויות המעוין.



44. נתון מעוין ABCD, הנקודה F נמצאת על אלכסון DB כך ש- $DF = FC$ ו- $FH = HC$.
חשבו את זוויות המעוין.

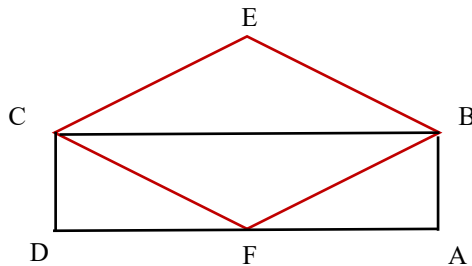


45. נתון מעוין FBCD, הנקודה A נמצאת על המשך הצלע DF כך ש- AB מקביל לאלכסון FC.



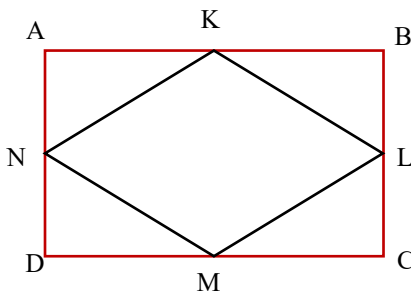
הוכיחו: $\angle CFB = \angle BAF$.

46. קודקוד F של מעוין CEBF, מונח על אמצע הקטע AD. מעבירים שני קטעים AB ו-CD מקבילים אחד לשני. ידוע ש- $\angle ECB = \angle CFD$.



הוכיחו שמרובע ABCD הוא מלבן.

47. הנקודות K, L, M, N הן אמצעי צלעות המלבן ABCD. הוכח: KLMN הוא מעוין.



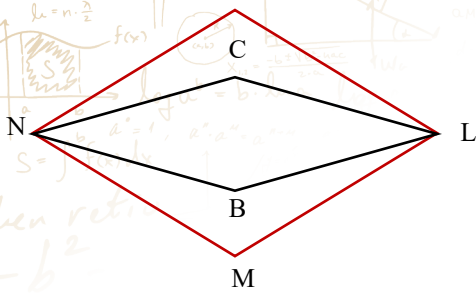
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

48. נתון מעוין NKLM, כמו כן העבירו מרובע בתוך

המעוין כך

ש- $\sphericalangle MNB = \sphericalangle KNC = \sphericalangle MLB = \sphericalangle KLC$.

הוכיחו שהמרובע NCLB הוא מעוין.

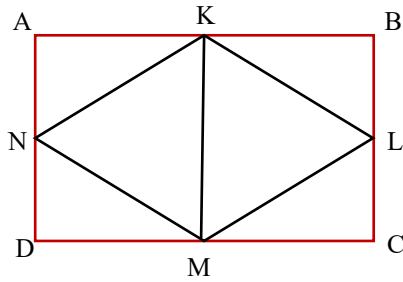


49. חסמו מרובע NKLM במלבן ABCD, L, K, M, N נמצאים על הצלעות AB, BC, CD, AD בהתאמה.

נתון ש- $\sphericalangle AKN = \sphericalangle DMN = \sphericalangle BKL = \sphericalangle CML$.

בנוסף ידוע $MK \parallel BC$.

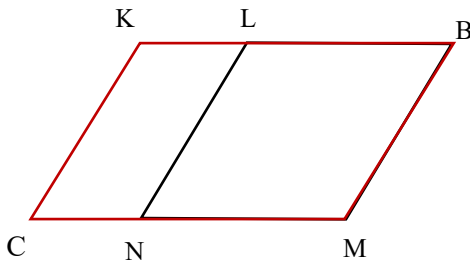
הוכיחו שהמרובע NKLM הוא מעוין.



50. נתונה מקבילית KBMC, נתון בנוסף $CK = NM$

ו- $KL = CN$

הוכיחו שמרובע LBMN הוא מעוין.



51. המרובע ABCD הוא מעוין.

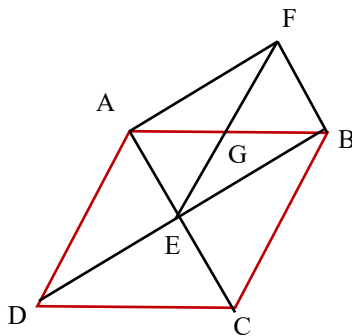
E מנקודה E, שהיא מפגש האלכסונים במעוין העבירו את

הקטע EF החותך את הצלע AB באמצע בנקודה G

כך ש: $\sphericalangle EFB = \sphericalangle ABF$, $CE = FB$.

א. הוכיחו ש- AFBE מלבן.

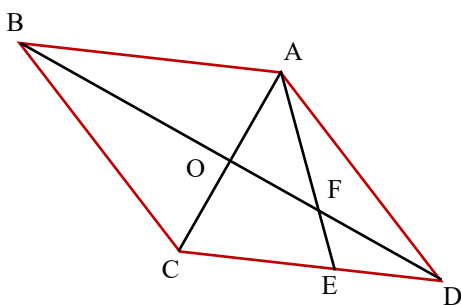
ב. הוכיחו ש- EFBC מקבילית.



52. במעוין ABCD נתון: $FO = OC$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle CAB$.

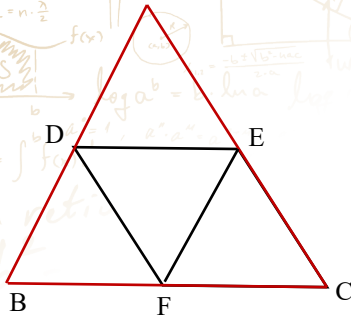
א. חשב את זוויות המעוין.

ב. הוכיחו: $DF = FA$.

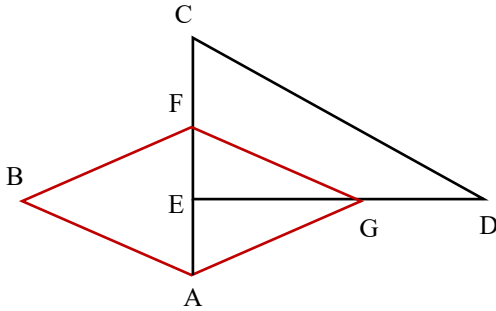


לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - סגורד

53. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). BE חוצה זווית B. EF מקביל ל-AB, $EC = DB$.
א. הוכיחו: DEFB מעוין.
ב. הוכיחו: DF מאונך ל-BE.

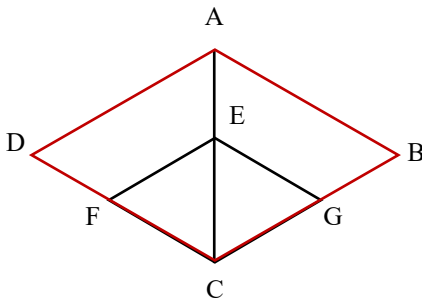


54. במעוין ABFG המשיכו את אלכסון AF עד לנקודה C כך ש-F אמצע הקטע CE, היא נקודת מפגש האלכסונים במעוין ABFG.
בנוסף העבירו קטע ED העובר בנקודה G כך ש- $DC = 2FA$.

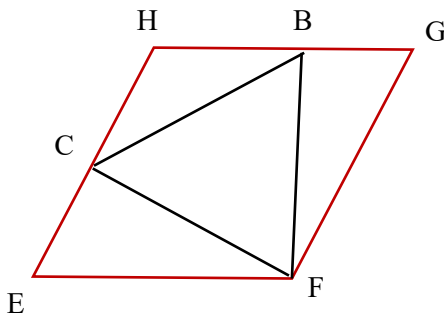


מצאו את זווית המעוין ABFG

55. נתון מעוין EGCF נקודה F היא אמצע הצלע DC ונקודה G היא אמצע הצלע BC.
נתון: $\angle FEC = \angle DAC$.
הוכיחו ABCD מעוין.



56. נתון במעוין GFHE שגודל זווית H היא 120 מעלות. העבירו שני קטעים מקודקוד F החותכים בנקודות C ו-B כך ש- $GB = CE$.
א. הוכיחו: $\angle CFE = \angle BFG$.
ב. הוכיחו שזווית $\angle CFB$ שווה 60 מעלות.



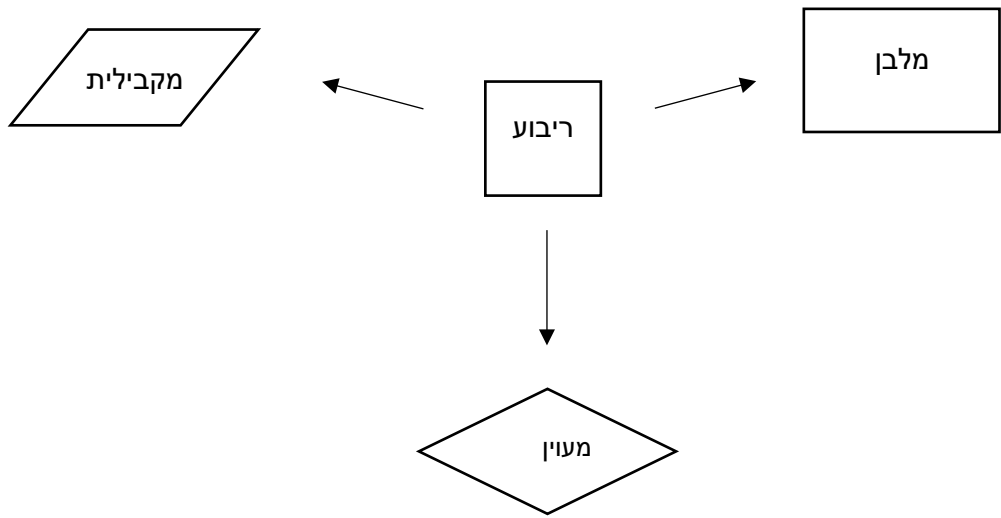
ריבוע

הגדרה: מרובע שכל צלעותיו וזוויותיו שוות

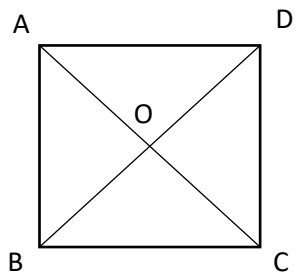
ריבוע הוא למעשה מרובע משוכלל ומשתייך למשפחת המקביליות.
*צורה משוכללת היא צורה שכל זוויות וצלעות שוות.

יחידה 1: תכונות הריבוע

ריבוע למעשה מקבל את כל התכונות של שאר המקביליות: מקבילית מלבן ומעוין

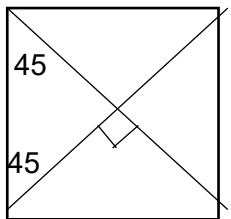


תכונות הריבוע:



1. כל הצלעות שוות:
 $AD=CD=BC=AB$
2. כל הזוויות שוות 90 מעלות:
 $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D$
3. אלכסונים שווים ומאונכים וחוצים זה את זה
 $AO = CO = BO = DO$ ו- $AC \perp BD, BD=AC$

מסקנות תכונות הריבוע



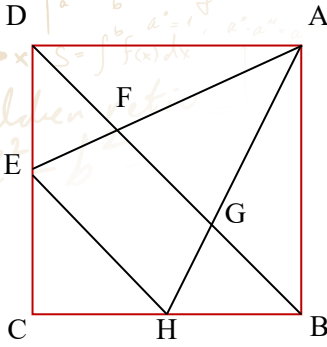
1. האלכסונים חוצים את הזוויות ל-45 מעלות
2. האלכסונים יוצרים 4 משולשים ישרי זווית ושווה

דוגמה לתרגיל הוכחה

ABCD הוא ריבוע.

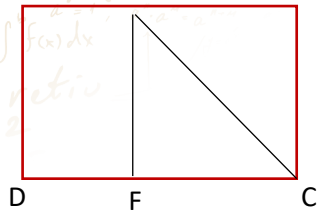
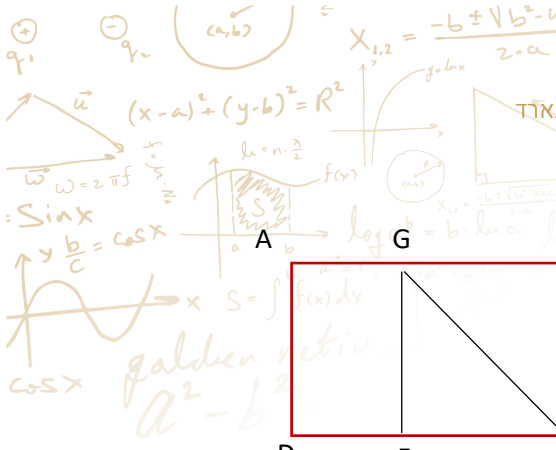
נתון, $AH=EH$, HE מקביל DB

הוכיחו $GB=DF$



נימוק	טענה	
נתון	ריבוע ABCD	1
אלכסון בריבוע חוצה את זוויות הריבוע	$\angle CDB = \angle CBD = 45$	2
נתון	$DB \parallel FH$	3
זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים	$\angle CEH = \angle CDB = 45$ $\angle CHE = \angle CBD = 45$	4
כלל המעבר	$\angle CEH = \angle CHE$	5
אם במשולש שתי זוויות שוות אז המשולש הוא מש"ש	משולש ECH מש"ש	6
שוקיים שוות במש"ש	$CH=EC$	7
צלעות בריבוע שוות	$CB=CD$	8
קטע שווה לסכום חלקיו	$HB=CB-CH$ $ED=CD-EC$	9
חיסור קטעים שווים מקטעים שווים	$ED=HB$	10
נתון (BH חוצה זווית FHE)	$\angle FHB = \angle BHE$	11
נתון	$AH=AE$	12
אם במשולש שתי זוויות שוות אז המשולש הוא מש"ש	משולש AEH מש"ש	13
זוויות בסיס במש"ש שוות	$\angle AEH = \angle AHE = \alpha$	14
זווית שטוחה	$\angle CHE + \angle EHA + \angle BHA = 180$ $\angle HEC + \angle HEA + \angle DEA = 180$	15
הצבה	$45 + \alpha + \angle BHA = 180$ $45 + \alpha + \angle DEA = 180$	16
העברת אגפים	$\angle BHA = 135 - \alpha$ $\angle DEA = 135 - \alpha$	17
כלל המעבר	$\angle DEA = \angle BHA$	18
לפי זווית צלע זווית (17, 9 ו-5)	$\triangle DFE \cong \triangle BGH$	19
צלעות מתאימות במשולשים חופפים	$DF=GB$	20

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד



דוגמה לתרגיל הוכחה

נתון מלבן ABCD.

הקטע GC חוצה את הזווית C ו-ADII GF.

הוכיחו ש-GBCF הוא ריבוע

נימוק	טענה	
נתון	מלבן ABCD	1
כל הזוויות במלבן שוות 90 מעלות	$\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90$	2
נתון	$AD \parallel GF$	3
סכום זוויות חד צדדיות שוות 180 מעלות	$\sphericalangle AGF + \sphericalangle A = 180$	4
חישוב	$\sphericalangle AGF = 90$	5
סכום זוויות צמודות שווה 180	$\sphericalangle AGF + \sphericalangle BGF = 180$	6
חישוב	$BGF = 90$	7
זוויות במלבן שוות 90 מעלות	$\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90$	8
מרובע בעל 3 זוויות של 90 מעלות הוא מלבן	מלבן BGCF	9
חיסור קטעים שווים מקטעים שווים	$ED = HB$	10
נתון	GC חוצה זווית C	11
אם במלבן אחד אלכסונים חוצה את זוויות המלבן אז המלבן הוא ריבוע.	BGFC ריבוע	12

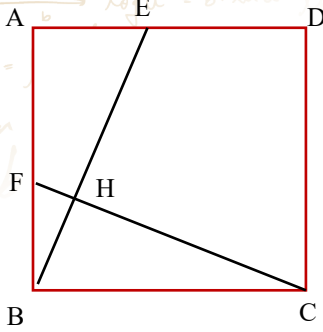
ריבוע

57. נתון ריבוע ABCD ידוע שהקטעים BE ו-CF מאונכים זה לזה,

בנוסף ידוע ש- $\angle BED = 115^\circ$.

א. חשבו את גודל זווית AFC.

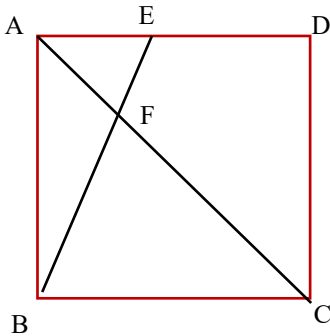
ב. הוכיחו ש- $AF = ED$.



58. AC הוא אלכסון בריבוע ABCD, בנוסף נתון $AF = AE$.

א. חשבו את גודל זווית ABE.

ב. הוכיחו ש- $BC = FC$.

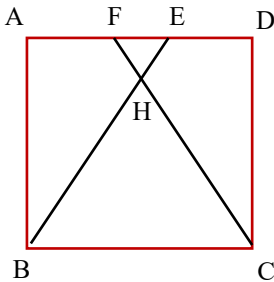


59. נתון ריבוע ABCD, בנקודות E ו-F נמצאות על הצלע AD. הקטעים

BE ו-CF נפגשים בנקודה H.

ידוע ש- $BH = HC = AD$.

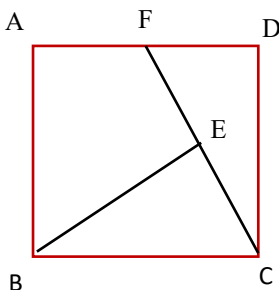
חשבו את זווית המשולש EFH.



60. נתון ריבוע ABCD. קטע היוצא מהקודקוד C וחותך את הצלע AD

נקודה F כך ש- $AF = FE$ (נקודה E על צלע FC) כמתואר בציור.

הסבירו מדוע מרובע ABEF אינו דלתון.



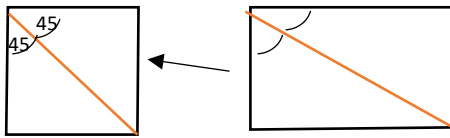
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות 5 יח"ל**
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורג

61. דיון: לפניכם הטענות הבאות, קבעו מי מהן נכונות ונמקו.

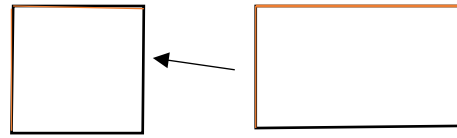
- א. כל מקבילית היא ריבוע.
- ב. כל מלבן הוא ריבוע.
- ג. כל ריבוע הוא מעוין.
- ד. כל המרובעים הם מקביליות.
- ה. כל ריבוע הוא מקבילית ומלבן.
- ו. כל מעוין הוא מלבן.

תנאים מספיקים להוכחת ריבוע

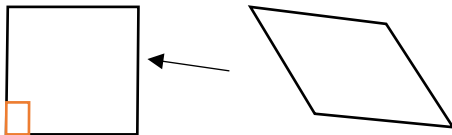
2. אם במלבן אחד אלכסונים חוצה את זוויות המלבן, אז המלבן הוא ריבוע



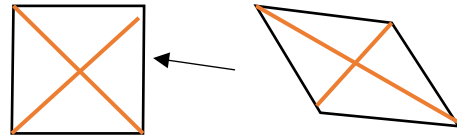
1. אם במלבן צלעות סמוכות שוות אז המלבן הוא ריבוע.



4. אם במעוין זווית אחת ישרה אז המעוין הוא ריבוע

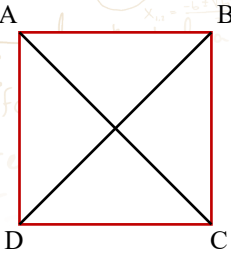


3. אם במעוין האלכסונים שווים זה לזה אז המעוין הוא ריבוע

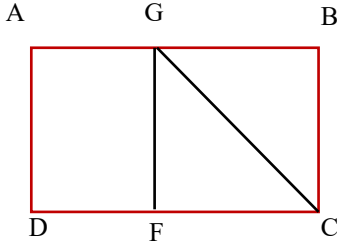


*אפשרות נוספת: אם במלבן האלכסונים מאונכים אחד לשני אז המלבן הוא ריבוע.
 *לא ניתן להוכיח שמקבילית היא מרובע באופן ישר, תחילה יש להוכיח שמקבילית היא מעוין או מלבן.

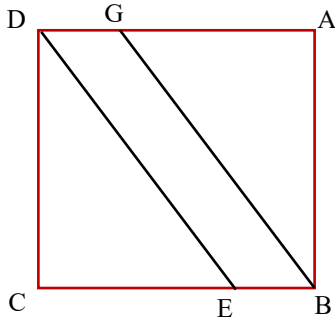
62. נתון מלבן ABCD נתון ש- $AC \perp BD$.
הוכיחו שהמרובע ABCD הוא ריבוע.



63. נתון מלבן ABCD, הקטע GC חוצה את הזווית $\sphericalangle C$ ו-ADIFG.
הוכיחו ש-GBCF הוא ריבוע.



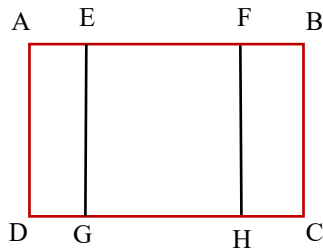
64. במרובע ABCD חסומה מקבילית DGBE.
נתון $AG = CE$ ו- $AG \perp AB$.
הוכיחו:



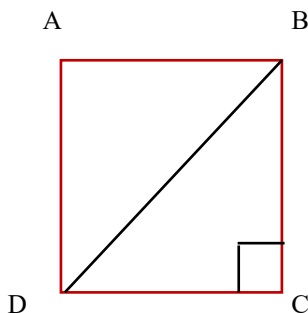
א. המרובע הוכיחו שמרובע ABCD הוא מלבן

ב. רשמו נתון נוסף כך שהמרובע ABCD יהיה ריבוע

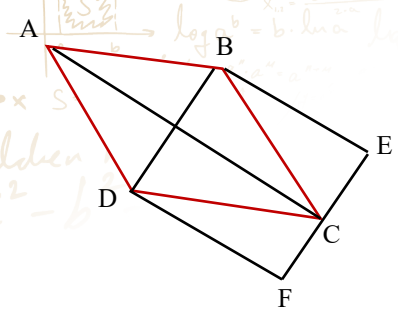
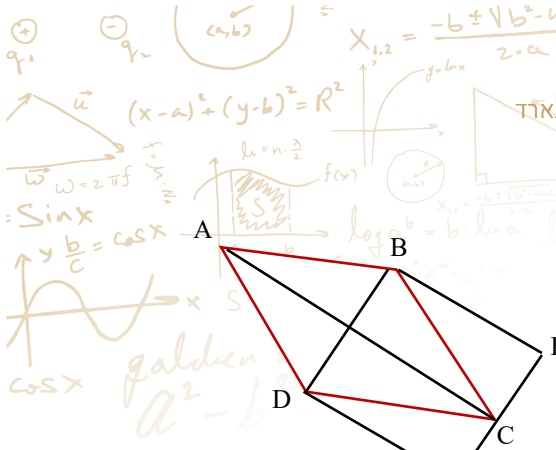
65. נתון שמרובע ABCD הוא מלבן, כמו כן ידוע ש- $AD = EF$ (ראו)
אזור) וש- $DC \perp EG$ ו- $HC = FB$.
הוכח EFHG ריבוע.



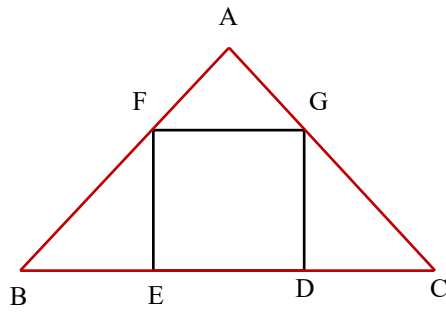
66. נתון ABCD מקבילית, $\sphericalangle C = 90$ וש- $\sphericalangle BDC = 45$.
הוכח המרובע ABCD ריבוע.



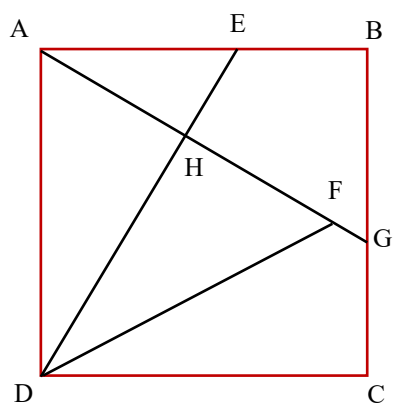
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד



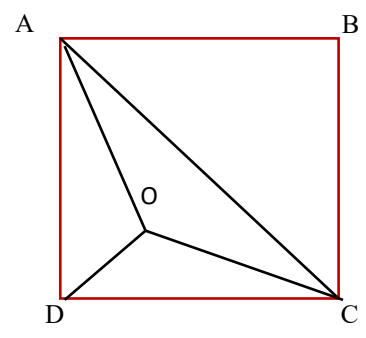
67. נתון מעויין ABCD, בנוסף יודע $\frac{1}{2}AC = BE$ מעבירים ישרים מהנקודות D ו-B עד הנקודות E ו-F כך ש-EF עובר בנקודת C ומקביל BD. הוכיחו שהמרובע DBEF ריבוע.



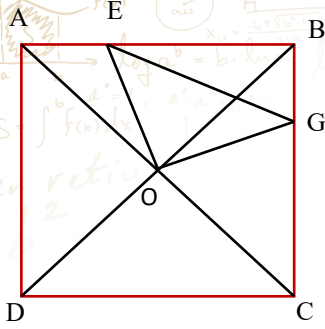
68. משולש ABC המתואר באיור שווה שוקיים וישר זווית, נתון GD ו-FE מאונכים לצלע BC. בנוסף $BE = DE = DC$. הוכיחו המרובע DGFE הוא ריבוע.



69. נתון ריבוע ABCD, כמו כן נתון ש- $AE = BG$.
א. הוכיחו ש- $AG \perp DE$.
ב. נתון ש- $\angle BAG = 30^\circ$, ו- $AE = 6$ ס"מ, מצאו את אורך צלע הריבוע.
ג. נתון ש- DF שווה לצלע הריבוע חשב את היקף המשולש DFH.



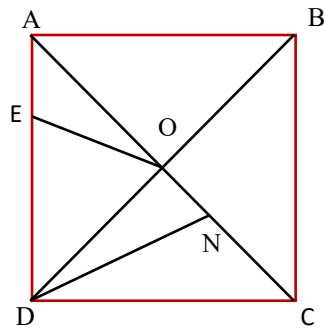
70. בריבוע ABCD נתון AO ו-CO חוצי זוויות ACD, DAC בהתאמה. הוכיחו DO חוצה זווית



71. המרובע ABCD הוא ריבוע. $EB = GC$.

א. הוכח שמשולש EOG שווה שוקיים.

ב. נתון: $\angle BOG = 25^\circ$, מצאו את זווית $\angle EOG$.

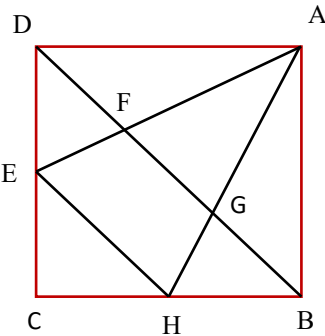


72. נתון ABCD ריבוע.

הנקודות E ו-N נמצאות על AD ו-AC בהתאמה כמתואר בשרטוט.

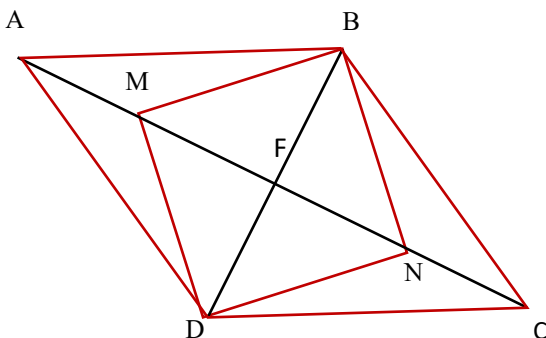
בנוסף נתון: $AN = AD, DO = DE$.

הוכיחו $\angle AOE = \angle ODN$.



73. ABCD הוא ריבוע, נתון $EA = AH$, HE מקביל DB.

הוכיחו $DF = GB$.



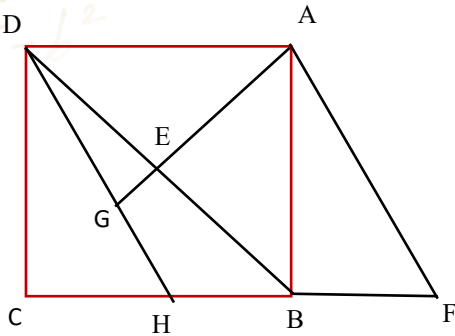
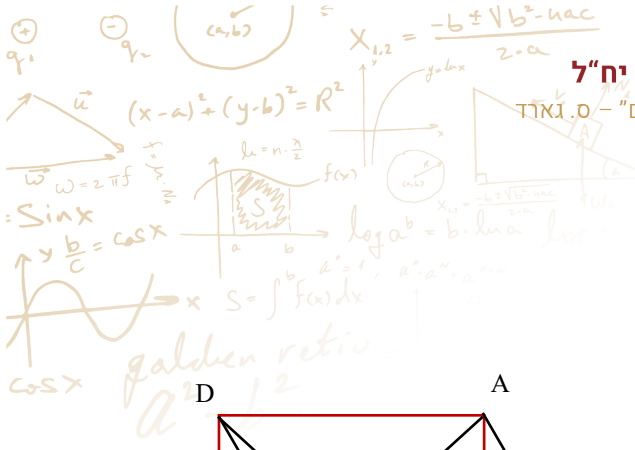
74. נתון מעוין ABCD.

הנקודות M ו-N נמצאות על אלכסון AC כך ש- $NC = AM$.

בנוסף נתון $\angle AMD = 135^\circ$

הוכיחו שמרובע MBND הוא ריבוע

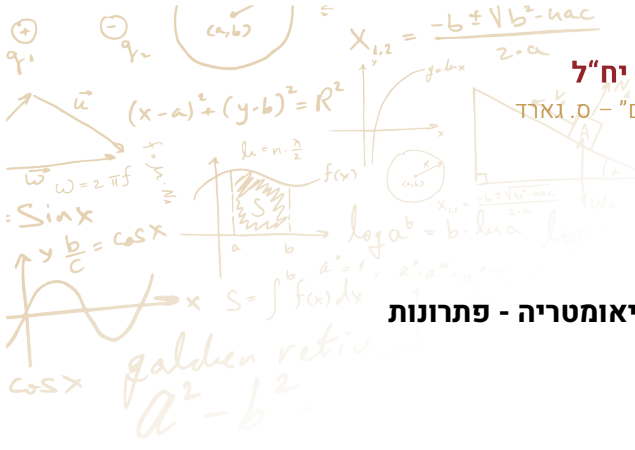
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד



75. נתונה מקבילית AFHD.

- בנקודה B נמצאת על HF והנקודה C נמצאת על המשך HF כך ש-AB ו-DC מאונכים ל-CF.
- כמו כן הנקודה G נמצאת על הצלע DH כך ש-DE מאונך ל-AG והנקודה E היא אמצע הקטע DB.

הוכיחו ש-ABCD ריבוע



כיתה ט' - יחידה 12 - מקביליות מיוחדות- גיאומטריה - פתרונות

1. הוכחה
2. הוכחה
3. הוכחה
4. הוכחה
5. א. 135, ב. הוכחה
6. א. הוכחה, ב. 64
7. א. הוכחה, ב. הוכחה, ג. הוכחה, ד. הוכחה, ה. 30
8. הוכחה
9. א. הוכחה, ב. לא
10. הוכחה
11. הוכחה
12. הוכחה
13. א. הוכחה, ב. הוכחה, ג. הוכחה
14. הוכחה
15. א. 120, ב. 30 ס"מ
16. הוכחה
17. א. הוכחה, ב. 30
18. א. הוכחה, ב. הוכחה
19. א. הוכחה, ב. הוכחה
20. הוכחה
21. 120, 60, 120, 60
22. הוכחה
23. הוכחה
24. הוכחה
25. הוכחה
26. א. 22.5 מעלות, ב. הוכחה
27. הוכחה
- 28.
29. הוכחה
30. הוכחה
31. 120, 60, 120, 60
32. 135, 45, 135, 45
33. הוכחה
34. הוכחה

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב5 יח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורד

35. הוכחה

36. הוכחה

37. הוכחה

38. הוכחה

39. א. הוכחה, ב. הוכחה

40. א. 45,135, ב. הוכחה, ג. הוכחה

41. א. הוכחה, ב. הוכחה

42. 90,60,30

43. הוכחה

44. א. הוכחה, ב. הוכחה

45. הוכחה

46. א. 22.5, ב. הוכחה

47. 60,60,60

48. הוכחה

49. א. לא נכון, ב. לא נכון, ג. נכון, ד. לא נכון, ה. נכון, ו. לא נכון

50. הוכחה

51. הוכחה

52. הוכחה

53. הוכחה

54. הוכחה

55. א. הוכחה, ב. 10

56. א. הוכחה, ב. הוכחה

57. א. הוכחה, ב. $6\sqrt{3}$, ג. הוכחה

58. א. הוכחה, ב. 135,22.5,22.5

59. א. הוכחה, ב. 70

60. הוכחה

61. הוכחה