

מתמטיקה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון
35581 מועד ב' - 2019
הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

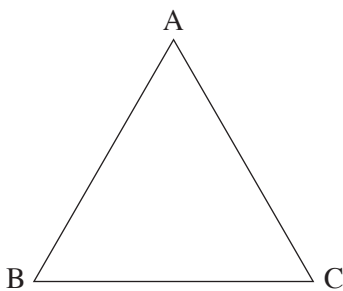
שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. בצויר שלפניך מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה צלעות ABC , שאורך צלעו a מטר.



ביום מסוים יצאו שני רוכבי אופניים באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B . הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.

כל אחד מהם רכב במהירות קבועה. המהירות של רוכב A גדולה ב-2 מטרים לשנייה מן המהירות של רוכב B .

כאשר הגיע רוכב A אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש, הגיע רוכב B אל הנקודה B בפעם השנייה.

א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב B , כאשר יגיע רוכב A אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב A אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי — מן הנקודה A לכיוון הנקודה C — בלי לשנות את מהירותו.

רוכב B המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו. הרוכבים נפגשו בנקודה M .

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M , ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למוחרת שוב יצאו הרוכבים מן הנקודה A , רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש, כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן. רוכב A חלף על פני רוכב B בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. מצא את היקף המשולש. נמק את תשובתך.

2.

נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$

א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2} = a_n + c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c .

ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1 .

בנו סדרה חדשה בת $2n + 1$ איברים:

$$a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n + 1)$$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43.

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

3.

בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו-8 כדורים צהובים.

על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.

$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1?

ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול אז כדור שרשומה עליו הספרה 1, מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק: הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.

בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.

הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.

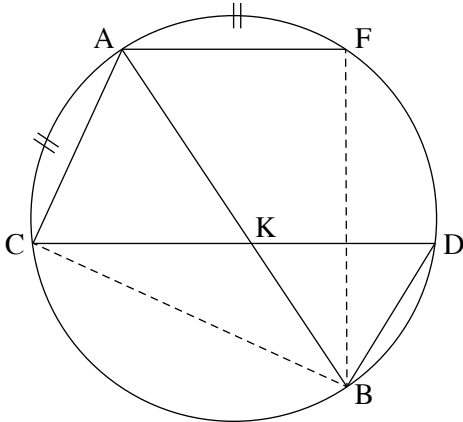
ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. AB הוא קוטר במעגל. CD ו-AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.



AB ו-CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\widehat{CA} = \widehat{AF}$ (הקשתות המסומנות בציור).

א. הוכח כי $\angle FAB = \angle CAB$ (1)

ב. הוכח כי $BK = BD$ (2)

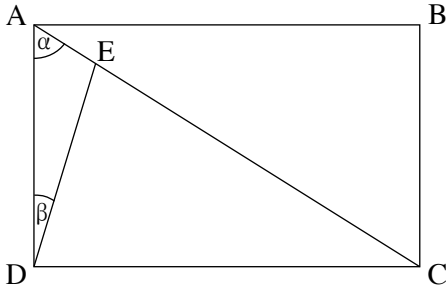
ג. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

ד. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$

(1) הוכח כי $\triangle BDC \sim \triangle CAB$

(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.

5. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).



נתון כי $\angle DAC = \alpha$

$\angle ADE = \beta$

R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β .

ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1 .

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. a הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? אן לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (הבע באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה

קבועה? קבע את סוגן בהתאם לערך של a (התייחס לשתי האפשרויות עבור a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f(x)$ היא קבועה. נמק.

נתון: $a > 1$.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x שווה ל-12. מצא את a .

7. נתון מעגל ובו קוטר AB . רדיוס המעגל הוא 10. הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B .

דרך הנקודה P מעבירים אנך ל- AB החותך את המעגל בנקודות C ו- D .

מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD .

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. b ו- c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

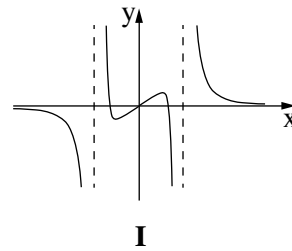
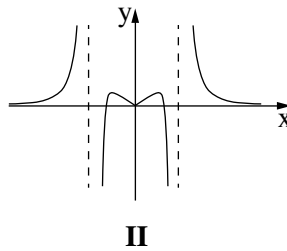
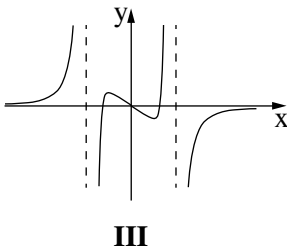
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

לפניך גרפים III-I.

(1) איזה מן הגרפים, III-I, הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - מועד ב' - 2019

1. א. מהירות רוכב א: 6 מטר לשנייה, מהירות רוכב ב: 4 מטר לשנייה ב. רוכב ב היה על נקודה B
 $P_{\Delta ABC} = 720$ C.T B-ל נמצאת בין M $\frac{BM}{MC} = \frac{4}{1}$

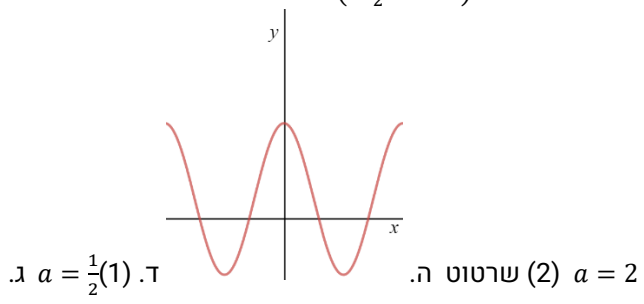
2. א. $c=6$ ב. $0, 11, 6, 17, \dots$ ג. $a_1 = 4$ ד. סכום הסדרה החדשה הוא: 1,763

3. א. $\frac{9}{40}$ ב. $\frac{3}{31}$ ג. 0.252105

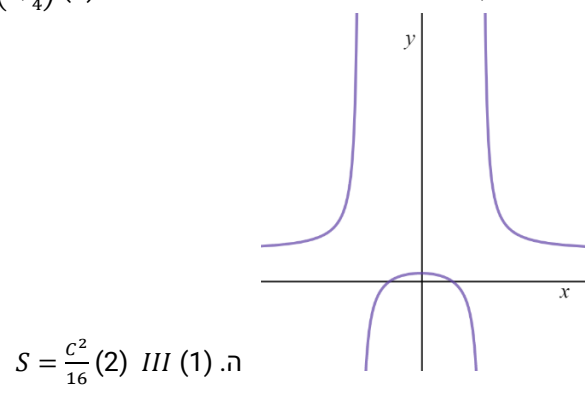
4. הוכחות

5. א. $\frac{R1}{R2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ ב. הוכחה ג. (1) הוכחה $BE^2 = R1^2(4 - \sqrt{3})$ (2)

6. א. זוגית ב. עבור $a < 0.5$: $\min(-\pi, a), \max(-\frac{\pi}{2}, 1-a), \min(0, a), \max(\frac{\pi}{2}, 1-a), \min(\pi, a)$
 עבור $a > 0.5$: $\max(-\pi, a), \min(-\frac{\pi}{2}, 1-a), \max(0, a), \min(\frac{\pi}{2}, 1-a), \max(\pi, a)$



7. $S_{\Delta ACD} = 75\sqrt{3}$
 8. א. $x \neq -2, x \neq 2$ ב. $b = 0$ ג. $0 < c < 4$ ד. $\max(0, \frac{c}{4})$ (1) $y = 1$ (2)



מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון
35581 קיץ - 2019
הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה במישור | — | 20×1 | — | 20 נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | | — | סה"כ | — | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. במאפייה יש שתי מכונות לייצור עוגות: מכונה I ומכונה II. כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה. ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה. ביום ראשון מכונה I ייצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II. ביום שני ייצרה מכונה II את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון, ומכונה I ייצרה את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה II ביום ראשון. ביום שני היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי $\frac{25}{9}$ מזמן העבודה של מכונה I באותו יום.
 - א. חשב כמה עוגות סך הכול ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.

נסמן: T_1 — הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה אחת,
 T_2 — הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה אחת.
 - ב. חשב את היחס $\frac{T_1}{T_2}$. נמק.
 - ג. (1) בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיוק 47 עוגות. כמה עוגות שלמות ייצרה מכונה II בפרק הזמן הזה? הסבר.
 (2) ידוע ששתי המכונות עבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצרה מספר שלם של עוגות. האם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

2. a_n היא סדרה הנדסית איך-סופית שהמנה שלה היא q . $|q| \neq 1$.

נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: $a_5 > 0$.

ב. (1) הבע את a_1 באמצעות q .

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

ג. (1) הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של k , והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k .

3. גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים. בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.

המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה.

אם לשתיהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.

(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?

(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק. הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של

4 הסיבובים תהיה תיקו – הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר

סיבובים, תנצח במשחק כולו.

מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

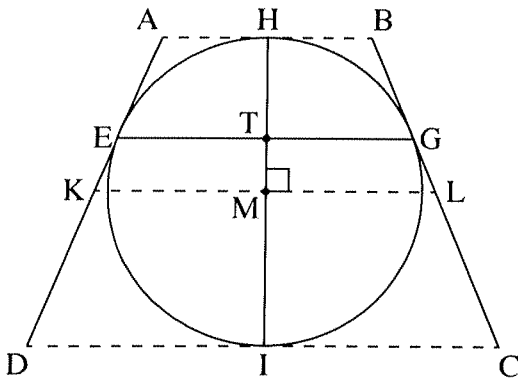
ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני.

מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r .

דרך הנקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.

דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG

וחותך את המשיקים בנקודות K ו-L, כמתואר בציור.

דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל- KL

אשר חותך את המיתר EG בנקודה T

ואת המעגל בנקודות H ו-I, כמתואר בציור.

נסמן: $TG = a$.

א. הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$ (1)

ב. הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו- r .

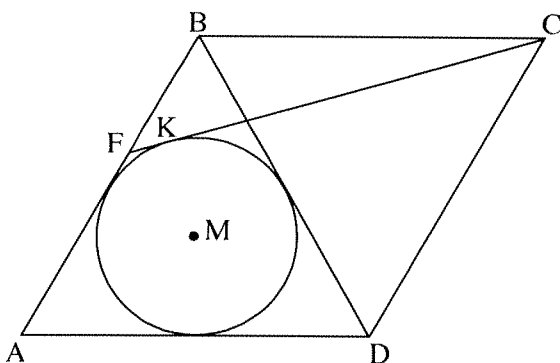
דרך הנקודות H ו-I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם את המעגל,

כמתואר בציור.

ב. הוכח: $BC = KL$ (1)

ג. הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו- r .

האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$? נמק.



5. ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a .

נתון: $\angle BAD = 60^\circ$.

במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M.

מן הקודקוד C העבירו משיק למעגל

שהמשכו חותך את הצלע AB בנקודה F

והוא משיק למעגל בנקודה K (ראה ציור).

א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

ב. (1) הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC.

(2) חשב את גודל הזווית ACF.

ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF.

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$. a הוא פרמטר המקיים $-4 < a < 2$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y .

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(5) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x שבעבורם $f'(x) = 0$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את הערך של a שבעבורו $f'(x) \neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

הצב $a = -1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx$. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 \sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. (1) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x בתחום הנתון.

(3) הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי-שליטית בתחום הנתון.

(4) קבע אם פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה- x שעבורם $f'(x) = 0$ מקיימים $\tan x = -\frac{1}{3}x$.

(2) בצור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

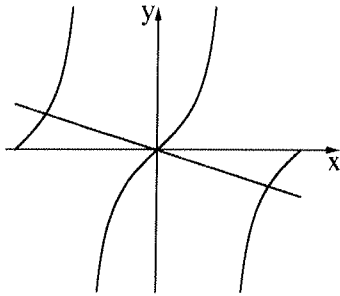
$$g(x) = \tan x \quad \text{ו} \quad h(x) = -\frac{1}{3}x$$

בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

היעזר בציור,

וקבע כמה נקודות בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$

מקיימות $f'(x) = 0$.



נתון: שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

ג. (1) מה הם שיעורי ה- x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק וקבע את סוגן.

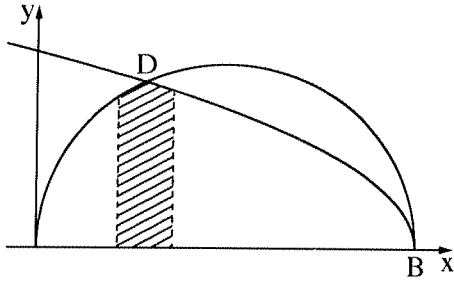
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, בתחום.

(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק.

8. בצירוף שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x}$ ו- $g(x) = \sqrt{14 - 2x}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה B , ואת גרף הפונקציה $g(x)$ הוא חותך בנקודות B ו- D , כמתואר בצירוף.



א. (1) מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות B ו- D .

a הוא פרמטר המקיים $1 \leq a \leq 2$.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,

על ידי האנכים $x = a$ ו- $x = a + 1$ ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x .

ב. (1) חשב את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובתיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון-קץ- 2019

1. א. 320 עוגות ב. 0.6 ג. 1. 28 עוגות שלמות ג. 2. לא יכול להיות

2. א. 1 או -1 ב. $\frac{1}{q^4}$ ג. 2. 9 ב. 3. אין ג. $q^2, q, 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^4}$ ד. 9

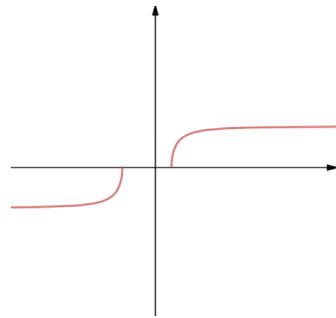
3. א. 1. $\frac{1}{9}$ 2. א. $\frac{8}{27}$ ב. $\frac{137}{729}$ ג. $\frac{137}{211}$

4. א. 1. הוכחה א. 2. $\frac{2r^2}{a}$ ב. 1. הוכחה ב. 2. $\frac{8r^2}{a}$ ג. לא

5. א. $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ ב. 1. הוכחה ב. 2. 14.48° ג. $0.267a^2$ יחידות שטח

6. א. 1. $x \leq -2, x \geq 1$ א. 2. הוכחה א. 3. $y = -0.5, y = 0.5$ א. 4. $(-2, 0), (1, 0)$

בתחום הגדרה x ג. 1. עולה לכל-1 ב. 2. $\frac{8-a}{2a+2}$ ג. 1. $x > 1 \rightarrow f(x) > 0, x < -2 \rightarrow f(x) < 0$ 5. א.

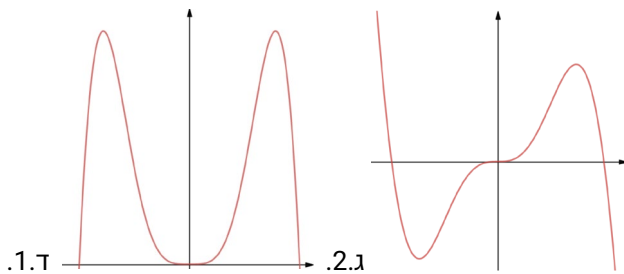


ד. 2.16 יח"ר

ג. 2.

7. א. 1. $f(x)$ זוגית א. 2. $(\pi, 0), (0, 0), (-\pi, 0)$ א. 3. הוכחה א. 4. $f'(x)$ אי זוגית

א. 1. $x_{min} = -\pi, x_{max} = -2.46, x_{min} = 0, x_{max} = 2.46, x_{min} = \pi$ ב. 1. הוכחה ב. 2. 3 נקודות ג. 1.



1. ד.

2. ג.

ד. 2. לפחות שתי נקודות פיתול

8. א. 1. $x \leq 7 - f(x), x \leq 7 - g(x)$ ב. $x_D = 2, x_B = 7$ ב. 1. 1.63, 2. $a = 1, a = 2$

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

35581

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
סה"כ	—		—	100	—	נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. קבוצת פועלים, חוטבי עצים מנוסים, תכננה לירות 216 מ"ק עץ במספר ימים מסוים (ההספק של הפועלים הוא קבוע).

בשלושת הימים הראשונים עבדו הפועלים על פי ההספק המתוכנן. החל מן היום הרביעי הם הגבירו את קצב עבודתם ומדי יום כרתו 8 מ"ק עץ יותר מן המתוכנן. הם עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן, וכרתו 232 מ"ק עץ סך הכול.

א. (1) על פי התכנון, כמה מ"ק עץ היו אמורים הפועלים לירות ביום?

(2) כמה ימים עבדו הפועלים בפועל?

ב. במהלך איזה יום מתחילת העבודה סיימו הפועלים לירות $\frac{2}{3}$ מן הכמות המתוכננת?

לאחר מכן הוצמד פועל מתלמד לכל פועל מנוסה בקבוצה, וכך נוצרה קבוצה חדשה ובה 2m פועלים סך הכול (m מנוסים ו-m מתלמדים).

ההספק היומי של הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן. כל הפועלים המנוסים עובדים באותו הספק יומי.

ההספק היומי של פועל מתלמד קטן ב-1 מ"ק מן ההספק היומי של פועל מנוסה. הקבוצה החדשה עבדה 8 ימים.

ג. (1) בטא את ההספק היומי של פועל מנוסה יחיד ושל פועל מתלמד יחיד באמצעות m.

(2) כמה פועלים יש בקבוצה החדשה אם ידוע שהם כרתו 336 מ"ק עץ סך הכול?

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).

סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.

א. (1) הראה כי סכום הסדרה שווה ל- $(2n+3) \cdot a_{n+2}$.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(1) מצא את האיבר האמצעי.

(2) מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.

מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל k איברים סמוכים (k הוא מספר טבעי) באופן

הזה: $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$, $(a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1})$, $(a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2})$, ...

ד. הבע באמצעות k את מספר האיברים בסדרה החדשה.

3. בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הברגות באזרחות.

נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הברגות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הברגות.

א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הברגות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הברגות היא 0.9.

שיעורם של הנכשלים בבחינת הברגות מכלל התלמידים שניגשו לבחינת בשנה זו היה 20%.

(1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הברגות?

(2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת. מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הברגות?

(3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הברגות. מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?

ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את

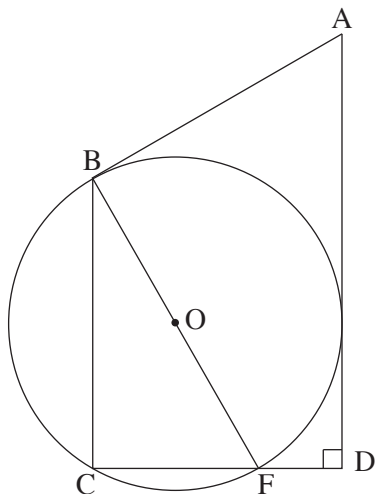
בחינת הברגות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הברגות בשנה זו היא a ($0 < a < 1$).

הבע באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הברגות בשנה זו.

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר במעגל.

מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל — האחד משיק למעגל בנקודה B והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.

נתון: $AD \perp CD$.

א. הוכח: $\angle BFC = \angle BAD$.

נתון: K היא נקודה על הצלע BC, כך ש- FK חוצה את $\angle BFC$.

ב. הוכח: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.

ד. הסבר מדוע שטח $\triangle BFK$ גדול משטח $\triangle KFC$.

5. ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R.

הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות AB ו- AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC

כך שהמרובע ADFE הוא מעוין (ראה ציור).

נתון: $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$.

א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\angle ABF$.

(2) הבע באמצעות R, α ו- β את אורך האלכסון AF.

ב. הבע באמצעות R, α ו- β את אורך צלע המעוין.

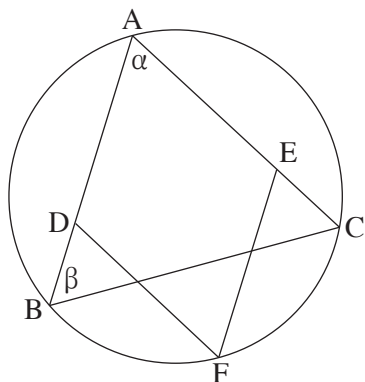
ג. הבע באמצעות R, α ו- β את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראה כי שטח המעוין הוא $2R^2 \tan \frac{\alpha}{2}$.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא $\frac{3}{5}R$.

ד. חשב את β .



**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתון: הפונקציה $g''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$ היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרות באותו תחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודת הפיתול שלה היא $y = \frac{3}{2}x - 3$.

א. (1) מצא את הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(3) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x) = |g(x)|$.

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף

הפונקציה $h(x)$.

ג. נתון כי $\int_a^2 g(x) dx = t$, $0 < a < 2$, t הוא פרמטר.

הבע באמצעות t את $\int_a^2 (h(x) - g(x)) dx$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ הוזה שמאלה ב- $\frac{\pi}{2}$ כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

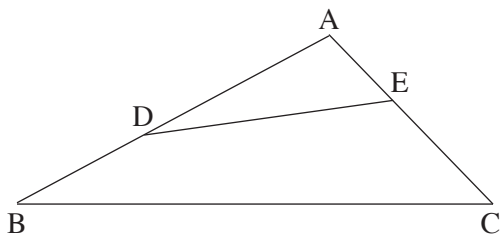
ב. (1) בטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) הוכח כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - \frac{\pi}{2}) dx : \text{III} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x + \frac{\pi}{2}) dx : \text{II} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + \pi) dx : \text{I} \quad : \text{III-I}$$

לפניך 3 ביטויים, III-I : ציין איזה מן הביטויים III-I שווה ל- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$. נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.



8. במשולש ABC נתון: $AB = 30$, $AC = 20$.

$\angle CAB = \alpha$. הוא קבוע.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB

והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא

רבע משטח המשולש ABC.

סמן את אורך הקטע AD ב- x .

א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.

ב. (1) הבע באמצעות α את האורך המינימלי של הקטע DE.

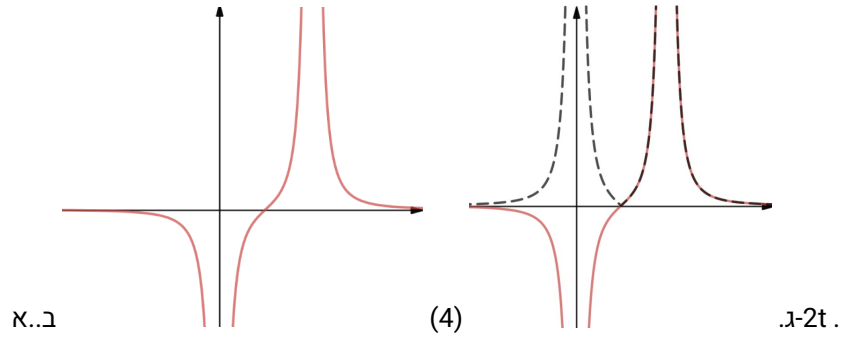
(2) הסק מתת-סעיף ב(1) את הערך של x שבעבורו היחס $\frac{DE}{BC}$ הוא מינימלי. הסבר.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - חורף - 2019

1. א (1) 24 מ"ק, א (2) 8 ימים, ב. במהלך יום שישי, ג (1) פועל מנוסה $24/m$, פועל מתלמד $1 - \frac{24}{m}$, ג (2) 12 פועלים
2. א (1) הוכחה, א (2) 43, ב (1) 40, ב (2) 1720, ג. עולה ד. א-44
3. א (1) 180 ת', א (2) 0.4, א (3) 0.36, ב. $a - a^2$
4. א. הוכחה, ב. הוכחה, ג. הוכחה, ד. נימוק
5. א. $\beta + \frac{\alpha}{2}$ (1), א (2) $2R \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)$, ב. $\frac{R \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}$, ג. הוכחה
6. א (1) $g(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{(x-4)^2}$, א (2) $x \neq 0, x \neq 4$, א (3) עלייה: $0 < x < 4$, ירידה $x < 0$ או $x > 4$,



7. א (1) $(\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, א (2) $\min\left(\frac{3\pi}{2}, -4\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{2}, -4\right)$, $\max\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.
8. א. $150/x$, ב (1) $\sqrt{300 - 300 \cos \alpha}$, ב (2) $\sqrt{150}$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
סה"כ	—		—		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.

רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.

3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של

2.5 מטרים לשנייה.

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו –

רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות

של 1.5 מטרים לשנייה.

אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^n - 2}{a_n}$, $a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה הנדסית,

וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n - 1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב־ n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האיך־סופית b_n היא סדרה יורדת.

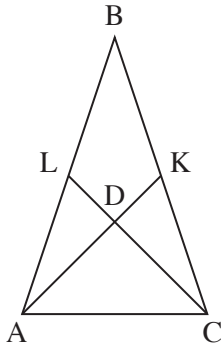
הבע באמצעות c את סכומה.

3. במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.
- לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
- התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.
- תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.
- תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.
- כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.
- א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
- בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.
- (1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
- (2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?
- ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
- בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
- מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
- ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.
- בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש- k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
- ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.
- מצא את k . נמק.

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).

AK ו- CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D .

נתון: $AK \perp CL$.

א. הוכח: $BD = AC$.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle BLDK}}{S_{\triangle ABC}}$.

ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע $ALKC$.

(1) הוכח: $\angle AML = 90^\circ$.

(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

BD הוא חוצה זווית במשולש ABC .

המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E .

גודל הזווית ABC הוא 2β .

א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE .

אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון: BE שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC .

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$.

נסמן ב- a את אורך השוק AB .

ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החוסם על ידי המשולש ABC .

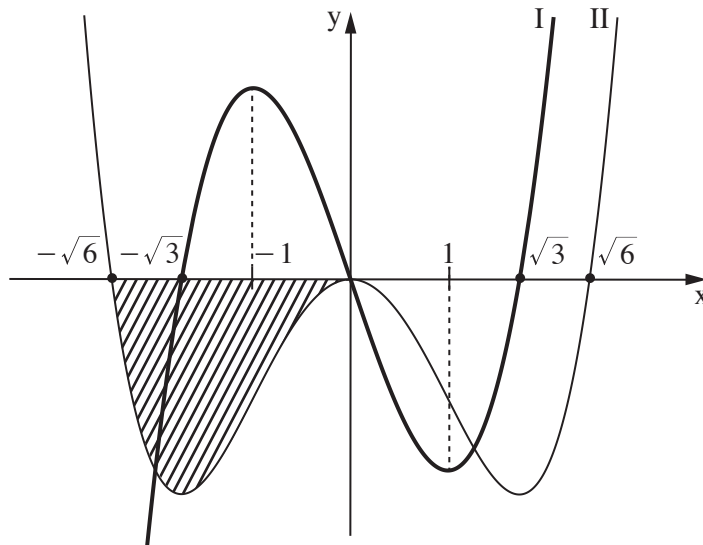
בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$ (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$) בתחום $-2.5 \leq x \leq 2.5$. שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



- א. התאם בין הגרפים I ו-II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמק.
- ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.
(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.
- ג. עבור איזה ערך של x בתחום $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, הוא מינימלי?
נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t .
- ה. הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).
- ו. נתון: קיימים a, b, c ממשיים כך ש- $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$. מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $x \geq \frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $x > 0$.

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

(i) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

(ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

(iii) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.

8.

בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בתחום $x > 0$,

ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון.

נתון: שטח המלבן הוא 4.

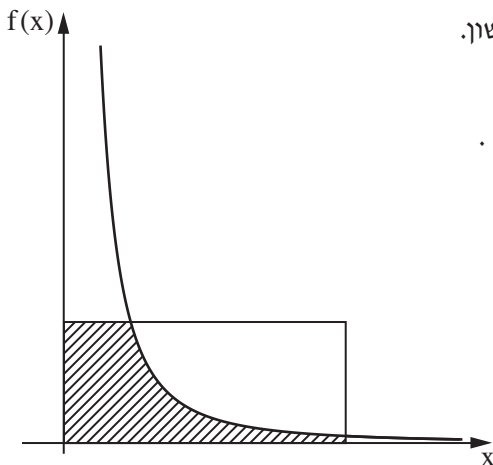
נסמן ב- a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- x . נתון: $a \geq \frac{1}{4}$.

א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים,

על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$

(השטח המקווקו בציור).

ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?



בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ביח"ל**
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - מועד ב' - 2018

1. א. 1 מטר לשנייה . ב. 620 שניות ($10\frac{1}{3}$ דקות).

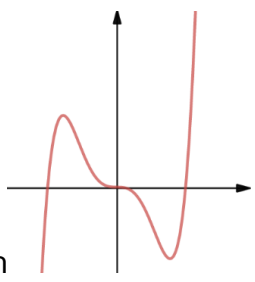
2. א. הוכחה . ב. (1) $a_1 = -\frac{1}{c} a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = c, a_5 = -c, a_6 = c^2, a_7 = -c^2$

(2) $S_7 = -\frac{1}{c}$ (3) הוכחה . ג. (1) הוכחה (2) $c > 1$ (3) $S = \frac{2c^2}{c-1}$

3. א. (1) $\frac{27}{64}$. (2) $\frac{37}{64}$. ב. $\frac{4}{9}$. ג. $k = 2$

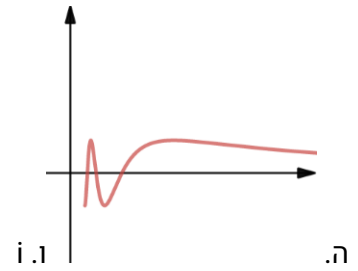
4. א. הוכחה . ב. $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3}$. ג. (1) הוכחה (2) $\frac{AM}{DM} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = 0.79$

5. א. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\sin 2\beta \sin 4\beta \sin 3\beta}{\sin^3 \beta}$. ב. 20.99 . ג. $r = 0.165a$



6. א. $f'(x)$ ו- $f''(x)$ ב. (1) 2, (2) 3, ג. 1, ד. $\frac{a}{b} = -\frac{1}{10}, C=0$. ה. t

7. א. $x \neq 0$. ב. (1,0), (0,5,0), (1/3,0) . ג. $\max(2,1)$, $\max(2/5,1)$, $\max(\frac{2}{7}, -1)$. ד. $y=0$



8. א. $\frac{4\sqrt{a}-1}{a}$. ב. 1/4

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

35581

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|------|---|-----|--------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 | נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה במישור | — | 20×1 | — | 20 | נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות | — | 20×2 | — | 40 | נקודות |
| | | | | סה"כ | — | 100 | נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.
אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.
אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שתיים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.
א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?
נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.
בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה. נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.
- ב. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.
(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

2. a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו- q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (IV-I). רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

$$(I) \quad q < 0$$

$$(II) \quad a_1 < 0 \text{ וגם } q < 0$$

$$(III) \quad a_1 < 0$$

$$(IV) \quad a_1 > 0 \text{ או } q < 0$$

נסמן ב- T את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n ,

ונסמן ב- R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n .

p הוא פרמטר.

נתון: $T + p \cdot R = 0$.

ב. הבע את p באמצעות q .

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p .

ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$

(כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

3. בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן

למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות II-I:

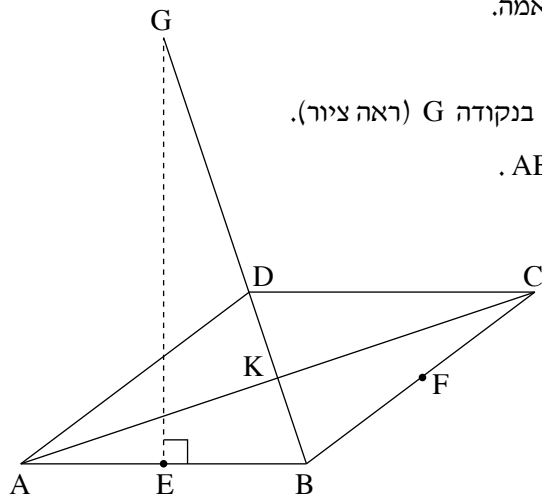
(I) התלמיד נעזר בחבריו.

(II) התלמיד לא עבר את המבחן.

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. ABCD הוא מעוין. E ו-F הן אמצעי הצלעות AB ו-BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E העלו אנך ל-AB, החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M,

שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

ב. הוכח שהמשולשים BFG, BKC, MFC, דומים זה לזה.

נסמן ב-R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,

וב-r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכח כי $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$ וכי $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.5. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).M היא נקודה על היתר כך ש- $AM : MC = \sqrt{3} : 4$.נתון: $\angle ABM = 30^\circ$, $BM = 8$.א. (1) סמן: $MC = 4x$ וחשב את זוויות המשולש ABC.

(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CMB.

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CBM ב- O_1 ו- O_2 בהתאמה.(1) הסבר מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.(2) חשב את אורך הקטע O_1O_2 .

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$. a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. הוכח: $a > 1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a .

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a = 3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x = \frac{2}{3}$ ו- $x = 2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x .

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = b$ ($b > \frac{1}{3}$).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = b$ שווה ל- $2S$ בעבור כל b .

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x > \frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את תשובתך.

7. $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x , כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x .

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע; ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x .

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

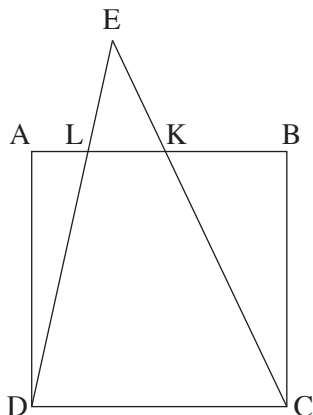
נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטת את

גרף הפונקציה $g(x)$.



8. ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

K ו-L הן נקודות על הצלע AB.

נתון כי הישרים CK ו-DL חותכים זה את זה בנקודה E,

הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD (ראה ציור).

נסמן: $LK = x$.

א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE.

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK, ADL ו-KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - קיץ - 2018

1. א. 10:00 . ב. $6v(1) < x < 3v$ (2) $\frac{3}{4}v$

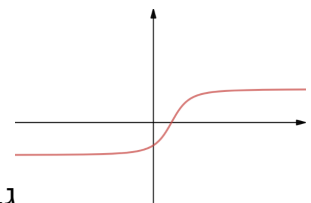
2. א. III . ב. $P = \frac{1}{q}$. ג. לא ד. הוכחה

3. א. $\frac{2}{9}$. ב. ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן ג. 0.1763 ד. 0.44

4. הוכחות

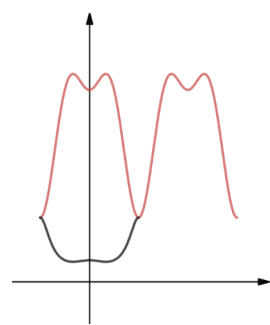
5. א. 36.87 (1) $\wedge A = 53.13$ (2) $\wedge R\Delta cmb = 6\frac{2}{3}$ (2) $\wedge R\Delta abm = 5$ (1) הוכחה, ב. $8\frac{1}{3}$ (2)

6. א. הוכחה, ב. $(\frac{1}{a}, 0)$, $(0, -1)$, ב. $Y = \sqrt{a}$, $Y = -\sqrt{a}$ (3). עלייה- לכל X, ירידה- אין

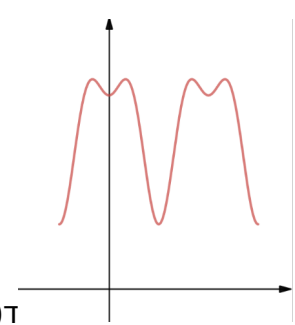


ב. 2 יח"ר ד. $g(x) = -f(x)$, $g(x) = 3f(x)$

7. א. הוכחה, ב. לא, ג. (1). כן, ד. (2). הוכחה, ג. $(0, 3)$, $\max(\frac{\pi}{3}, 3\frac{1}{4})$, $\min(\pi, 1)$



ד(1) כל x, ד(2)



ג(4)

8. א. $x - \frac{6x}{6}$. ב. $6 - 3\sqrt{2}$

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|---------------------------------|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| פרק שלישי | — | במישור | | | | |
| | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | | | | |
| | | של פולינומים, של פונקציות שורש, | | | | |
| | | של פונקציות רציונליות | | | | |
| | — | ושל פונקציות טריגונומטריות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | | — | סה"כ | | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.

הנפח של בריכה א' הוא V_1 והנפח של בריכה ב' הוא V_2 .

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הספק.

ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחילו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר התמלאה בריכה א' לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו

אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחילו למלא אותה באמצעותו. כאשר התמלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד

שני צינורות למילוי בריכה ב'.

מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.

חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

2. a_n היא סדרה חשבונית שהפרש שלה, d , שונה מ-0.

נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12} .

ב. (1) האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל- a_1 ? נמק.

(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל-0.

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן — מצא n כזה, אם לא — נמק.

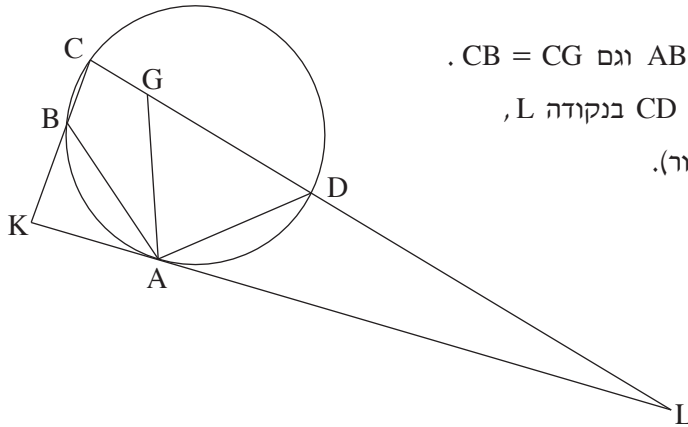
ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

3. למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.
- לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3. מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת. המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר. נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.
- א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.
- ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?
- ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. המרובע ABCD חסום במעגל.

הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש- $AB = AG$ וגם $CB = CG$. המשק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L, וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).

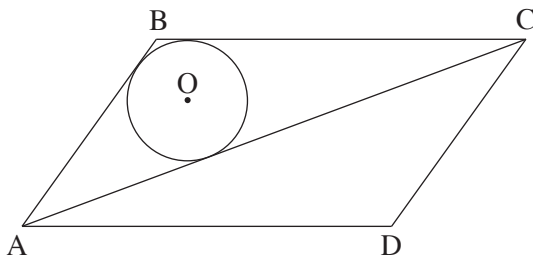
א. הוכח כי $AD = AG$.

ב. (1) הוכח כי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$.

ג. הראה כי $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

5. נתונה מקבילית ABCD. AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.



במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.

נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים 3 ו-6 מן הישרים AD ו-AC בהתאמה;

$OA = 10$.

א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC.

ג. חשב את שטח המקבילית.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכח: $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$. נמק את תשובתך.

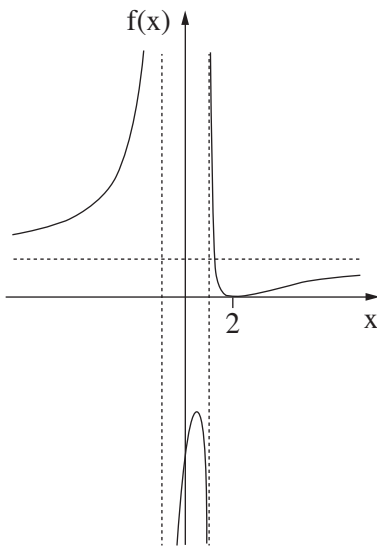
7. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - a}$. $a \neq 4$, $a \neq 0$, הוא פרמטר, a .

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 0$ ובין $a < 0$ במידת הצורך.

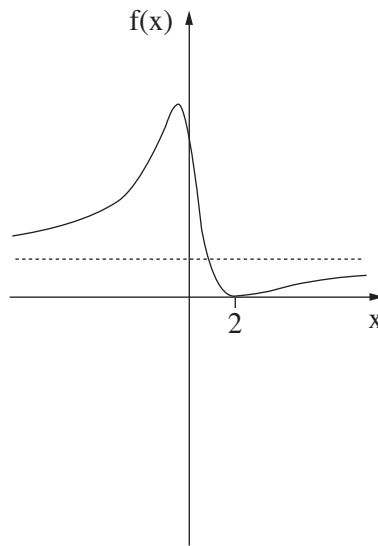
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה- x .
- (4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 4$ ובין $a < 4$ במידת הצורך.

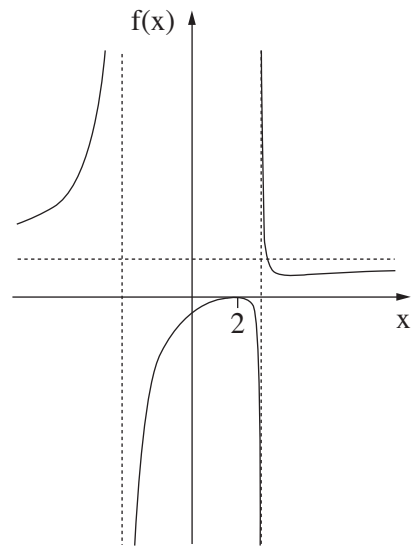
- ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 - ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a .
- כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים III-I. נמק את תשובתך.



III



II



I

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = t$.

נתון: $1 \leq t \leq 5$.

המשיק חותך את ציר ה־ x בנקודה A ואת ציר ה־ y בנקודה B . הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - חורף - 2018

1. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{18}{29}$

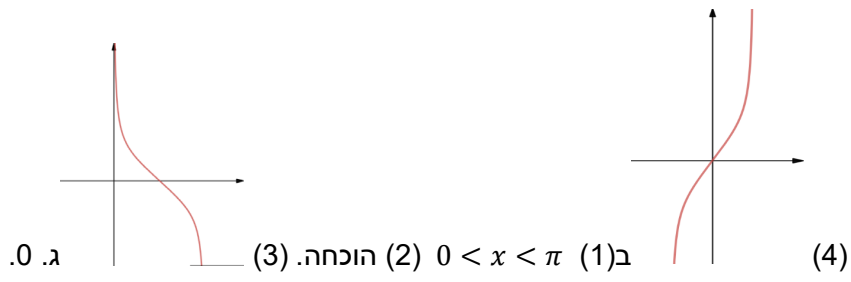
2. א. $a_{12} = 0$ ב. (1) κ , $a_{23} = -a_1$ (2) $n=23$, ג. לא.
ד. אם האיבר הראשון שלישי הסדרה עולה: 11 איברים שליליים. אם האיבר הראשון חיובי הסדרה יורדת: לא ניתן לדעת.

3. א. על פאה אחת. ב. 0.3466 ג. 0.5533

4. א. הוכחה. ב. (1) הוכחה, (2) הוכחה. ג. הוכחה.

5. א. 54.33° 125.67° ב. $AC=27.08$ ג. $S_{ABCD} = 171.73$

6. א. (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (2) $x = \frac{\pi}{2}$ (3) עלייה: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ירידה: אין.



7. א. (1) עבור $a < 0$ כל x .

עבור $a > 0$ $x \neq \sqrt{a}$ $x \neq -\sqrt{a}$

(2) $(0, -\frac{4}{a})$ $(2, 0)$ (3) $y=1$ (4) עבור $a < 0$: אין. עבור $a > 0$: $x = \sqrt{a}$ $x = -\sqrt{a}$

ב. עבור $a > 4$: מקסימום $(2, 0)$, מינימום $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$, עבור $a < 4$: מינימום $(2, 0)$ מקסימום $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$
ג. גרף (1) $a > 4$. גרף (2) $a < 0$. גרף (3) $0 < a < 4$.

8. א. $x = \sqrt{3}$ ב. $x=5$

סוג הבחינה: בגרות
 מועד הבחינה: קיץ תשע"ז, 2017, מועד ב
 מספר השאלון: 316,035806
 נספח: דפי נוסחאות ל- 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

35581

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|---------------------------------|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| פרק שלישי | — | במישור | | | | |
| | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | | | | |
| | | של פולינומים, של פונקציות שורש, | | | | |
| | | של פונקציות רציונליות | | | | |
| | — | ושל פונקציות טריגונומטריות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | — | סה"כ | | | | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
- שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

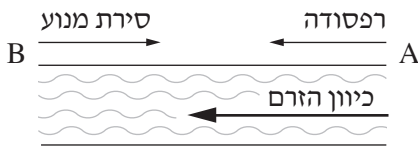
השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1. העיירות A ו-B נמצאות על גדת נהר הזרם

במהירות קבועה. כיוון הזרם הוא מ-A ל-B.

מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A.

הסירה שטה נגד כיוון הזרם.

באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A

לכיוון העיירה B. הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.

מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר.

מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.

הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו-45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרך. סירת המנוע

הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B.

כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B, הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B.

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.

כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו

בפעם השנייה?

2. נתונה סדרה כללית a_n .

נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $n > 1$ באמצעות n ו- k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$ (סכום ריבועי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב- a_2).

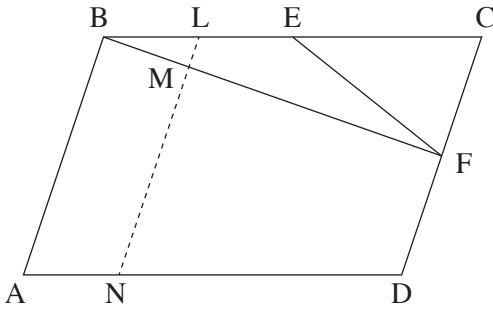
ג. חשב את T .

3. בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים, ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים. מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II. אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II, ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.
- א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.
- חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.
- ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.
- ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?
- ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום. מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. המרובע ABCD הוא מקבילית.

הזווית A היא זווית חדה.

הנקודה E היא אמצע הצלע BC

והנקודה F היא אמצע הצלע CD

(ראה ציור).

א. שטח המשולש ECF הוא S.

הבע את שטח המקבילית ABCD

באמצעות S. נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.

דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל-AB וחותך את BF ואת AD

בנקודות M ו-N בהתאמה.

חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון $BE = EF$.

האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.

5. ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$).

נתון: $AB = a$, $CD = b$, $(a < b)$.

$\angle C = 60^\circ$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו-b.

נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

7. לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

א. התאם בין הגרפים I ו-II

לבין הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$. נמק.

נתון: $f'(x) = x(x + b)^3$, $b > 1$ הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב- $x = -1$.

ב. מצא את b .

C ו-D הן נקודות החיתוך

של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$

בתחום $x < 0$, כמתואר בציור.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים I ו-II

בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה- x .

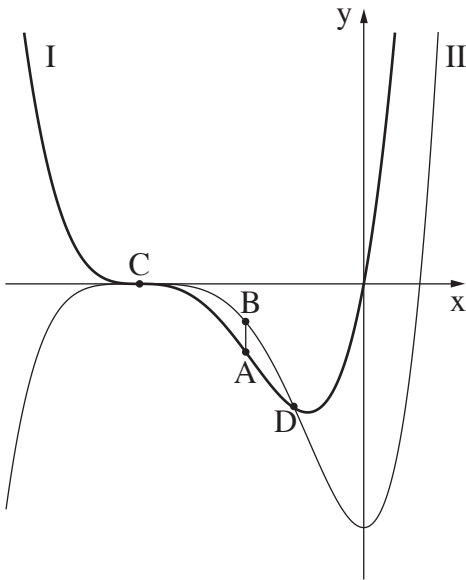
נתון: $x_C < x_A < x_D$,

$$x_C = -4$$

$$x_D = 1 - \sqrt{5}$$

ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודות A ו-B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי

(אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).



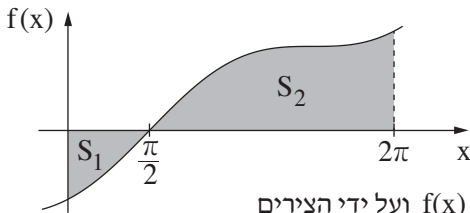
8. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$

השטח האפור בציור) שווה ל- $10\pi^2 + 16$.



$$\text{נתון גם: } \int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$$

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים

(השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8 \sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - מועד ב' - 2017

1. א. מהירות הזרם: 5 קמ"ש, מהירות הסירה: 20 קמ"ש. ב. $6\frac{1}{4}$ שעות.

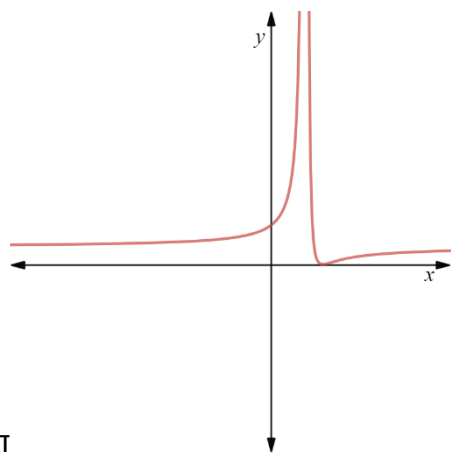
2. א. $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$. ב. $k = \frac{1}{3}$. ג. $T = \frac{1}{182}$

3. א. מספר הכדורים הנחולים הוא 5 . ב. 0.3595 . ג. 0.5338.

4. א. $s_{ABCD} = 8S$. ב. $\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}$. ג. לא ניתן לחסום את המרובע ABFD במעגל.

5. א. $AD=BC=b-a$. ב. $b=12$. ג. $R=6.11$ (1) . ה. $r = 2\sqrt{3}$ (3) . ה. הוכחה.

6. א. (1) $x \neq 2$. ב. $x=2, y=a$. ג. (3) $(a-1, 3)$ מינימום. (4) עלייה: $x > 3$ או $x < 2$



ירידה: $2 < x < 3$. ב. $a=1$. ג. $k=1$ או $k=-1$. ד.

7. א. (1) $f'(x)$. (2) $f(x)$. ב. $b=4$. ג. $x_A = x_B = -2$

8. א. $s_1 = \pi^2 + 8$. ב. $f(\frac{\pi}{2}) = -\pi^2 - 8$. ג. $f(x) = -8\cos x + 8x - 4\pi$

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית שאלון ראשון מ-5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
פרק שלישי	—	במישור				
	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי				
		של פולינומים, של פונקציות שורש,				
		של פונקציות רציונליות				
	—	ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
		סה"כ	—		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- (2) שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מן המשגיחים.
- שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות. בכל פעם, לאחר שעברה מקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת. במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.
נגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.
 - א. מהו אורך המסלול?
 - ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול. גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45.
באיזה מארבעת מקטעי המסלול פגש דניאל את נגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?

$$2. \text{ נתונה הסדרה } a_n = \frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{2^n}$$

b_n ו- c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

$$\text{נתון: } c_3 = \frac{1}{8}, \quad b_6 = 64$$

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n .

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n .

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב- A_n ,

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב- B_n ,

ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב- C_n .

ב. הראה ש- $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי-שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

3. בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות של- 4 מהם בדיוק

יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות של- 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל- 3 מהם יש קלנועית.

מהי ההסתברות של- 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד של- 3 מהם בדיוק יש קלנועית.

מהי ההסתברות שייבחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

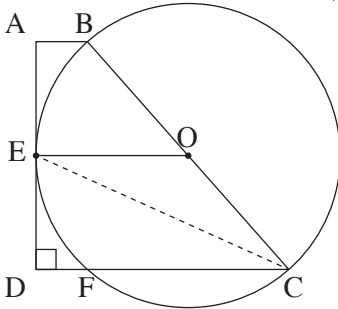
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתון מעגל שמרכזו O.

ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle ADC = 90^\circ$, $AB \parallel DC$).



הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E,

והנקודות B ו-C נמצאות על המעגל כך ש-BC הוא קוטר.

הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F, כמתואר בציור.

א. הוכח: $\angle BCD = 2\angle DEF$.

ב. הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle DFE$.

ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).

AF, CE ו-BD הם תיכונים במשולש,

הנחתים בנקודה O (ראה ציור).

א. הוכח: $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle COD}$.

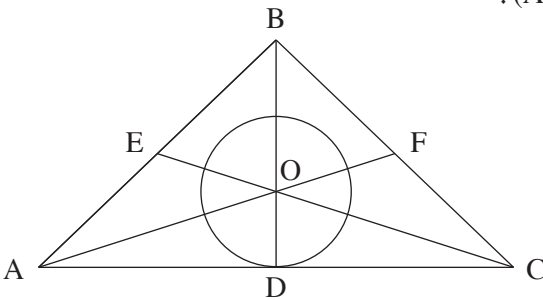
מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC

בנקודה D.

נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC.

ב. חשב את גודל הזווית ACE.

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.



**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- (3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
- (4) מצא את את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

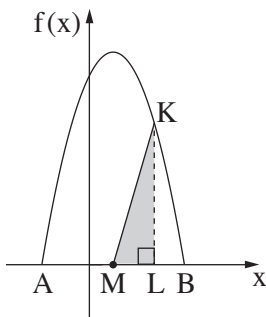
נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x+5)$.

- ב. (1) הוכח ש־ $g(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1 < a < b$ מתקיים השוויון: $\int_a^b g(x) dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x) dx$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
- ג. נתון: $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x = a$ וציר ה- x שווה ל-1.
 מצא את a .



8. בציוור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x + c$ בתחום האי-שליליות שלה.
 A ו- B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 נתון: $x_B = 2t$, $x_A = -t$ ($t > 0$).
 א. מצא את t ואת c .
- M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה- x .
 K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל לציר ה- x .
 מהנקודה K הורידו אנך לציר ה- x , החותך את הקטע AB בנקודה L.
 ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.
 מצא את שני הפתרונות האפשריים.
 תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - קיץ - 2017

1. א. 40 קמ"ש.
ב. במקטע השני בשעה 10:30.

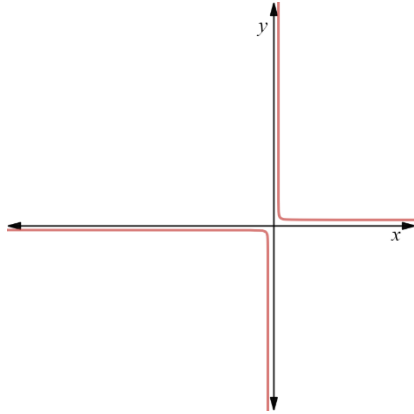
2. א. (1) $q_b = 2$ $q_c = \frac{1}{2}$ $b_1 = 2$ $c_1 = \frac{1}{2}$ ב. הוכחה ג. $n \geq 4$

3. א. $p = \frac{1}{5}$ ב. $\frac{16}{103} = 0.15534$ ג. $\frac{128}{3125} = 0.04096$

4. הוכחה.

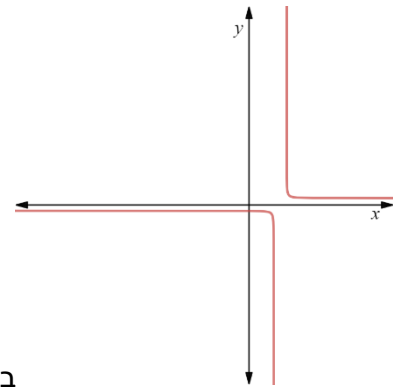
5. א. הוכחה. ב. $\angle ACE = 17.66^\circ$ ג. $OE = \frac{R\sqrt{1+\pi^2}}{2} = 1.648R$

6. א. (1) $x > 2$ או $x < 4$. (2) $(0, -1.02)$. (3) $x=4, x=6, y=1, y=-1$ (4) ירידה: $x < 4$ או $x > 6$, עלייה: אף x .



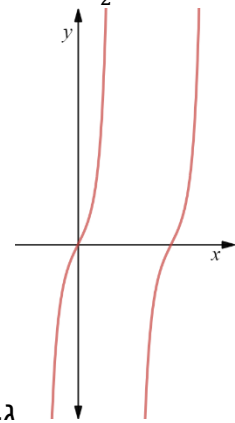
ג. הוכחה.

ב. (1) הוכחה. ב. (2)



(5)

7. א. (1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (2) $(\pi k, 0)$ (3) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (4) $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.



א. $a = \frac{\pi}{4}$ ב.

8. א. $c=8$ ב. $x = 1 + \sqrt{3}$ או $x = 1 - \sqrt{3}$

סוג הבחינה: בגרות

מועד הבחינה: חורף תשע"ז, 2017

מספר השאלון: 035581

נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית

שאלון ראשון מ-5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| | | במישור | | 20×1 | — | 20 נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | סה"כ | | | — | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני צינורות א' ו-ב' מזרימים מים לברכה בקצב קבוע.

כאשר צינור א' בלבד פתוח, הברכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- m שעות.

כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הברכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- $2m$ שעות.

כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הברכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ- 4 שעות.

ביום מסוים הברכה הייתה ריקה. פתחו את צינור א' בלבד למשך שעתיים.

אחר כך פתחו גם את צינור ב', ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.

בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ- $\frac{1}{2}$ הברכה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערכים האפשריים של m .

ב. ביום אחר $\frac{1}{2}$ הברכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית

צינור ב' רוקן מים מן הברכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן

במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים בברכה וצינור ב' רוקן ממנה מים.

בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הברכה יחד, עד שהיא

התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.

נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהברכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.

מצא את m .

2. נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$, $a_1 = -1$.

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n = \frac{1}{a_n} + 2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$.

3. אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P ($P > 0$), ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע

בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P .

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר

ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח

במשחק?

(2) גם תמר משתתפת במשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- P

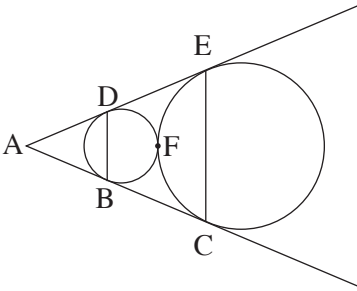
ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר תחטיא בזריקה הראשונה.

מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,

המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.

AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו-C,

AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו-E,

כמתואר בציור.

א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה שוקיים.

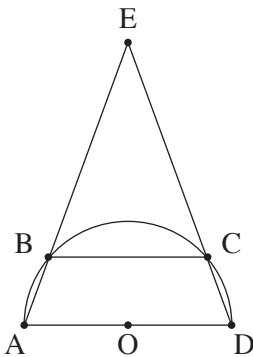
ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את

שוקי הטרפז, BC ו-DE, בנקודות G ו-H בהתאמה.

הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב-R את רדיוס המעגל הגדול וב-r את רדיוס המעגל הקטן.

הוכח כי $R \cdot BD = r \cdot CE$.



5. נתון טרפז ABCD ($BC \parallel AD$)

החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R

כך ש-AD הוא קוטר של חצי המעגל.

המשכי השוקיים AB ו-DC נפגשים

מחוץ למעגל בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $\angle EAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות R ו- α את אורך הקטע BC.

ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α ? נמק.

ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD.

מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R?

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל
פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + 4x}{x^2 + 3x + b}$.

a ו- b הם פרמטרים.

נתון: $x = 1$, $y = 1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים

(מלבד $x = 1$ ו- $y = 1$)? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)| = -f(x)$? נמק.

ה. נגדיר $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.

הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה- x, על ידי גרף הפונקציה g(x)

ועל ידי הישר $x = 0.5$ הוא $\frac{1}{3}$. נמק את תשובתך.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר.

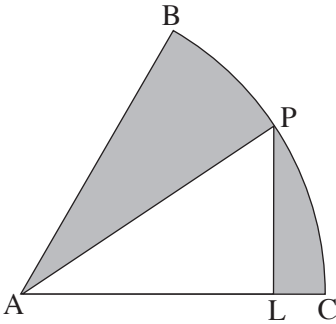
ענה על הסעיפים א-ו עבור $a > 0$. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת $f'(x)$.
(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. מצא את ערך הביטוי: $\int_{2a}^{3a} f(x) dx + \int_{-3a}^{-2a} f(x) dx$.

ענה על סעיף ז עבור $a = 0$.

- ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



8. נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A.

מנקודה כלשהי P, הנמצאת על הקשת BC,

הורידו אנך ל-AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L

(ראה ציור).

השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC

ובין הרדיוסים AB ו-AP, והקטעים LP ו-LC.

נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi - 36$.

א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה

השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצא את R.

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL? נמק.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - חורף - 2017

1. א. $6 < m < 10$, ב. 8.5

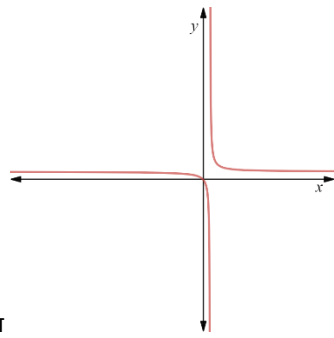
2. א. הוכחה, ב. $s_n = \frac{1}{2}(3^n - 1) - 2n$, ג. $s_n = \frac{1}{4}(1 - 3^n)$

3. א. $\frac{5}{8}$, ב. 0.724 ג. 0.5188 (1) 0.518 (2)

4. הוכחות

5. א. $-2R\cos 2\alpha$, ב. $45 < \alpha < 90$, ג. 1.59

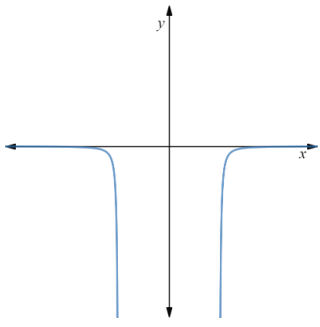
6. א. $a=1, b=-4$, ב. (1) $x \neq 1, -4$ (2) (0,0) (3) אין אסל, יש חור (-4,0.8).



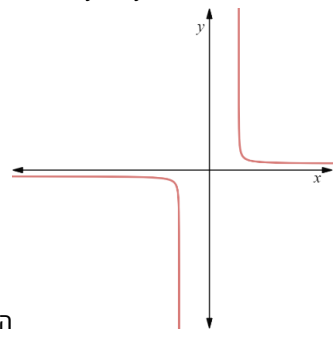
ד. $0 < x < 1$. ה. הוכחה

(4) ירידה $-4 < x < 1$ או $x < -4$ או $x < -4$, עלייה אין. ג.

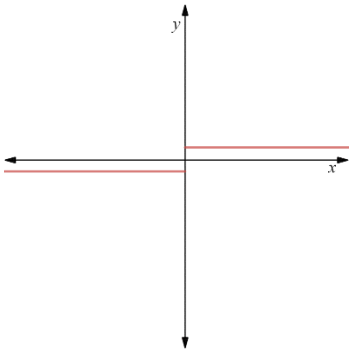
7. א. $x > a$ או $x < -a$, ב. $x < -a$, $x = -a$, $y = 1$, $y = -1$, ג. ירידה: $x > a$ או $x < -a$, עלייה: אין



ה. (1) $x=a, x=-a, y=0$ (2)



ד.



ו. 0.1

8. א. (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $R=12$, ב. 36

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית

שאלון ראשון מ-5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|---------------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| | | במישור | | | | |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | סה"כ | | | — | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מן המשגיח. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.

גל התחיל לעבוד בשעה 8:00, וסיים לעבוד בשעה 15:00.

דני התחיל לעבוד לאחר השעה 8:00 ולפני השעה 9:00, וסיים לעבוד בשעה 13:00.

ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה 9:00.

כמה זמן אחרי השעה 8:00 התחיל דני לעבוד?

ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה.

ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.

כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

המשך בעמוד 3

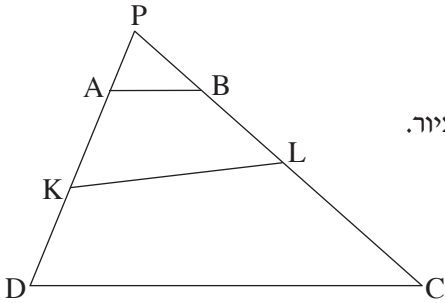
2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3 ,
- א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.
- (1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.
- (2) נתון כי היחס שמופיע בתת-סעיף (1) שווה ל-1.9 .
- סכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5 .
- מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.
- ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה. הבע באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.
3. שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו. יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים. ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.
- א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב-2 משחקים או ב-3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב-4 משחקים. חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.
- בסבב השני יש 2 משחקים.
- ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון – היא 0.34 .
- ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?
- ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

◀ המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. נתון משולש PDC.

הנקודות B ו-L מונחות על הצלע PC.

הנקודות A ו-K מונחות על הצלע PD, כמתואר בציור.

נתון כי המרובע ABLK הוא בר־חסימה במעגל.

וגם המרובע KLCD הוא בר־חסימה במעגל.

א. הוכח: $AB \parallel DC$.

נתון: $PA = 3$ ס"מ, $PB = 4$ ס"מ.

שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר,

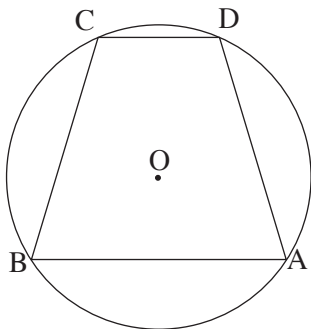
שטח המרובע ABCD הוא 24S סמ"ר.

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD? נמק.

ג. מצא את אורך הצלע PD.

ד. נתון גם: $BL = 5$ ס"מ.

היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע KLCD.



5. במעגל חסום טרפז ABCD ($AB \parallel DC$).

מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).

רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h.

נתון: $\angle BOA = 3\alpha$, $\angle COD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α את $\angle DAB$.

ב. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו-R.

ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו-h.

ד. נתון כי שטח המשולש COD הוא $\frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. מצא את α .

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}$.

א. בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

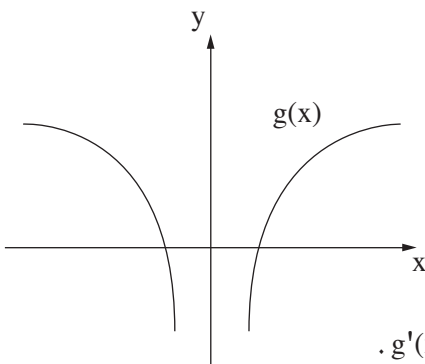
- (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).
- (3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).
- (4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

וקבע את סוגן.

ב. בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

- (1) הראה שפונקציה $f(x)$ היא זוגית.
 - (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. מצא את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y .

המשך בעמוד 6 ◀



7. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$

מוגדרות לכל x השונה מ-0,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר $x = 0$ הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטוט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

נמק את שיקולך.

(2) סרטוט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$. נמק את שיקולך.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$ שווה ל-5.25.

ב. הישר $x = 1$ חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ בנקודה A,

והישר $x = 2$ חותך גרף זה בנקודה B.

מצא את ההפרש בין שיעור ה- y של הנקודה A ובין שיעור ה- y של הנקודה B. נמק.

ג. הביטוי $y = \frac{a}{x^3}$ מתאר אחת מן הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ-0.

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמק את קביעתך.

(2) מצא את הערך של a.

8. במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$) אורך היתר הוא k ס"מ (k הוא פרמטר).

הניצב AB הוא גם יתר במשולש ADB, שהוא שווה שוקיים וישר זווית ($\sphericalangle ADB = 90^\circ$).

א. סמן $AB = x$ והבע את BC באמצעות x ו-k.

ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC \cdot AD^2$ הוא $3\sqrt{3}$.

מצא את שטח המשולש ADB (ערך מספרי), כאשר המכפלה $BC \cdot AD^2$ היא

מקסימלית.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורג

מתמטיקה - 35581 - פתרון - מועד ב' - 2016

1. א. 20 דקות ב. 5.6 שעות

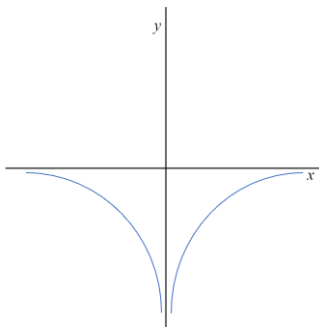
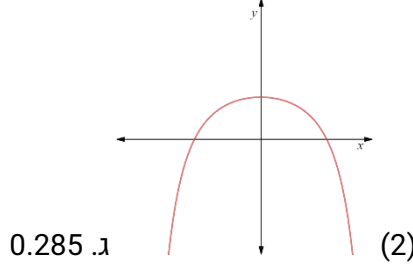
2. א. (1) הוכחה, $a_1 = 1$ (2) $d = \frac{3}{k+1}$ ג.

3. א. $1/2$ ב. 0.3 ג. $\frac{15}{34}$

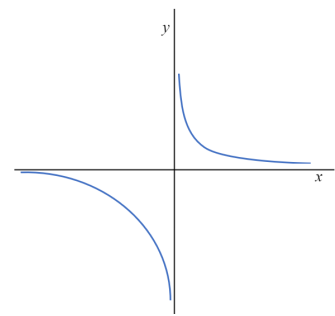
4. א. הוכחה ב. לא ג. 15 סמ"ר. $16S$ סמ"ר

5. א. $90 - \frac{\alpha}{2}$ ב. $2R \cos \alpha$ ג. $\frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ ד. 30°

6. א. (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (2) $x = \frac{\pi}{2}$ (3) $(0, 0.5)$ (4) $\max(0, 0.5)$ ב. (1) הוכחה



ג. 5.25, (1) $g'(x)$ (2)



7. א. $a=6$

8. א. $\sqrt{k^2 - x^2}$ ב. 1.5 סמ"ר

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
 מועד הבחינה: ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
 מספר השאלון: קיץ תשע"ו, 2016
 נספח: 035581
 דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית שאלון ראשון מ-5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| פרק שלישי | — | במישור | | | | |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | סה"כ | — | | | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.

המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.

המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב- 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.

כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה

לחצי ממהירותה הקודמת, והגיעה לעיר ב' $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.

א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ- 60 קמ"ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א' ולפני שהמכונית השנייה השיגה את

המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ

(מצא את שתי האפשרויות).

2. נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n : S_1, S_2, S_3, \dots

נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.

ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את a_1 .

נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$ לכל n טבעי.

ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום

$$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{20} - b_{19})$$

◀ המשך בעמוד 3

3. במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו- 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה

פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

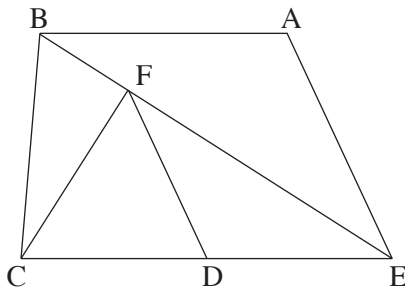
(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. נתון טרפז $ABCE$ ($AB \parallel EC$)

הנקודה F נמצאת על האלכסון BE

כך ש- $CF \perp BE$.

הנקודה D היא אמצע הבסיס CE (ראה ציור).

נתון: $\angle CEB = \angle AEB$

$ED = 3a$, $EA = 4a$

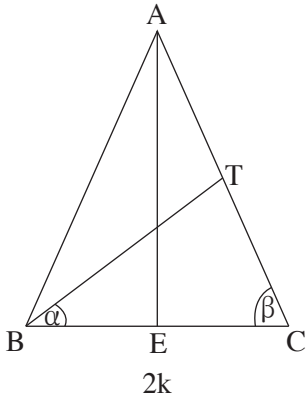
א. הוכח כי $\triangle EAB \sim \triangle EDF$.

ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S .

הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF .

ג. המשיך DF חותך את AB בנקודה G .

הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG .



5. נתון משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).

AE הוא גובה לבסיס BC ,

ו- BT הוא תיכון לשוק AC (ראה ציור).

נתון: $\angle ACB = \beta$, $\angle TBC = \alpha$, $BC = 2k$,

א. (1) הבע את האורך של TC באמצעות k ו- β בלבד.

(2) היעזר בתת-סעיף א(1), והראה כי

$$\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

ב. נתון גם: $TE = 5$ ס"מ, $k = 4$ ס"מ.

(1) מצא את β .

(2) מצא את α .

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות

ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \sin(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

ענה על הסעיפים שלפניך עבור התחום הנתון.

א. מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. (1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup וכלפי מטה \cap של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

המשך בעמוד 5

$$7. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$$

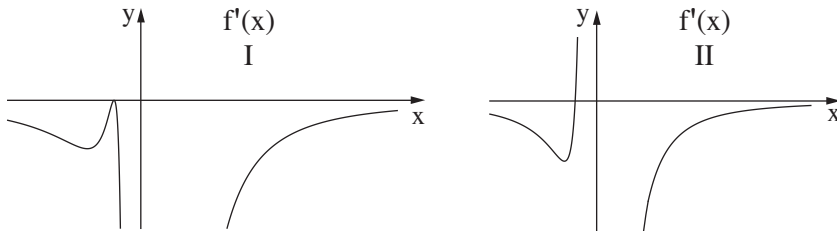
a הוא פרמטר גדול מ-0.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמק.
- ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = -1$, שווה ל-4. מצא את הערך של a.
- ד. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $f(x) = g'(x)$. אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ היא נקודה שבה $x = 0$.
- (1) הראה כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = 2x^2$.
- (2) מצא את התחום שבו מתקיים $f(x) > g(x)$.

המשך בעמוד 6 ◀

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$, n הוא מספר טבעי גדול מ-1.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 - הראה כי עבור n אי-זוגי $f'(x) \leq 0$ לכל $x \neq 0$.

לפניך שני גרפים, I ו-II. (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון).



אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת של $f'(x)$ עבור n זוגי, והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת של $f'(x)$ עבור n אי-זוגי. היעזר בגרפים I ו-II, וענה על הסעיפים ג, ד, ו-ה.

ג. עבור n אי-זוגי:

- מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.
- מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. עבור n זוגי:

- מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.
- מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות: $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$, $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x) \cdot h''(x)$ עבור $x > 0$? נמק.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - קיץ - 2016

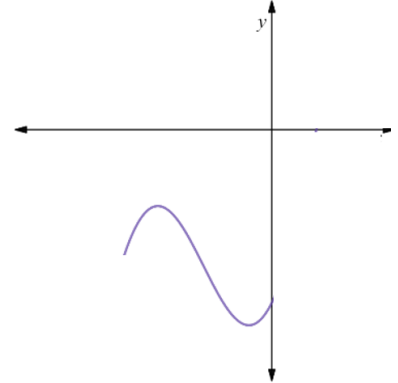
1. א. 75 קמ"ש , ב. 0.5 שעות, 2 חצי שעות

2. א. 1064 , ב. הוכחה, ג. $a_1 = 56$, ד. 11,704

3. א. $\frac{1}{2}$ ב $\frac{1}{2}$ (1) ב $\frac{31}{32}$ (2)

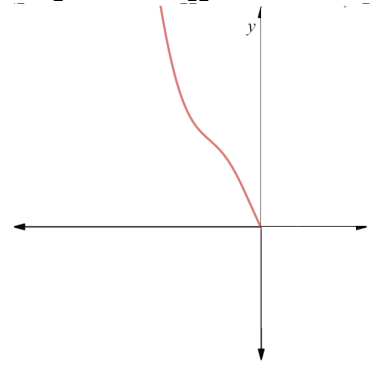
4. א. הוכחה ב. $S_{CEF} = \frac{9}{8}S$, ג. $S_{BFG} = \frac{1}{16}S$

5. א. (1) $\frac{k}{2\cos\beta}$ (2) הוכחה ב. (1) 66.42 (2) 37.38



6. א. $m_{MAX} = -0.866$, ב. $m_{MIN} = -2.255$

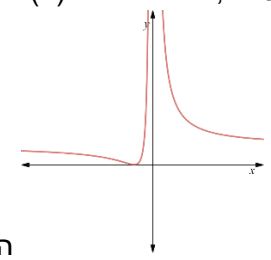
ג. (1) כלפי מעלה: $-\frac{5\pi}{12} < x < -\frac{\pi}{2}$ או $-\frac{1}{12}\pi \leq x \leq 0$, כלפי מטה $-\frac{1}{12}\pi < x < -\frac{5\pi}{12}$



ג. (2)

7. א. כל x , ב. אי זוגית, ג. 4, ד. (1) הוכחה (2) $0 < x < 2$

8. א. $x=0$, ב. הוכחה ג. (1) אין קיצון (2) נק' פיתול ד. (1) יש קיצון אחת (2) יש פיתול אחד



ה. חיובי (3)

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ו, 2016
מספר השאלון: 35581
נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית שאלון ראשון מ-5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|---------------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | — | 20×1 | — | 20 נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | סה"כ | — | | | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רוכב אופניים ורוכב אופנוע יצאו באותו רגע זה לקראת זה משני יישובים שונים.

הם נפגשו כעבור 3 שעות.

רוכב האופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין שני היישובים ב- 1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב

האופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך שבין שני היישובים.

מהירויות הרוכבים אינן משתנות.

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנוע גדולה מן המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא בכמה שעות עובר רוכב האופנוע את כל הדרך שבין שני היישובים.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב- 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו- II:

$$I. a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots, a_n \cdot a_{n+1}, a_{n+1} \cdot a_{n+2}$$

$$II. \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I.

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II.

3. במכונת מזל אפשר לזכות ב- 50 שקל, ב- 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכונה זו.

ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות

שהוא יזכה ב- 50 שקל בדיוק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב- 50 שקל שונה מאפס.)

ההסתברות שדן לא יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 100 שקל במשחק בודד?

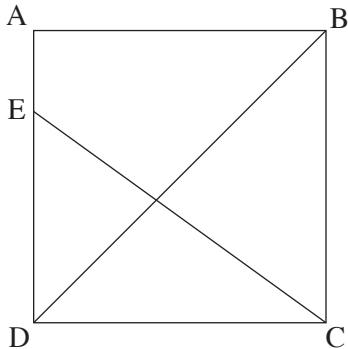
ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב- 100 שקל בדיוק.

מהי ההסתברות שהוא לא זכה ב- 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. בריבוע ABCD הנקודה E

נמצאת על הצלע AD (ראה ציור).

מעגל העובר דרך הנקודות D, E ו-C

חותך את האלכסון BD בנקודה M,

ואת הצלע BC בנקודה N.

הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B

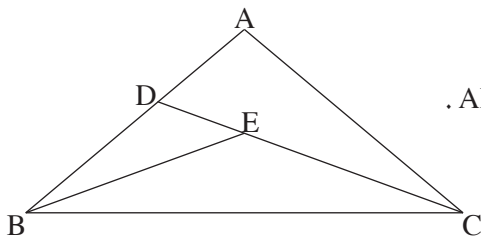
ובין נקודת החיתוך של BD עם CE.

א. הוכח כי $CD = EN$.

ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE,

ארוך ממנו או שווה לו? נמק.

ג. הוכח כי $BM \cdot BD = AE \cdot AD$.



5. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$)

זווית הבסיס היא 2α .

הנקודה E היא מפגש חוצי-הזווית במשולש ABC.

המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D

(ראה ציור).

נתון: $\angle BAC > 90^\circ$, $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \alpha}$.

א. מצא את α .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC

ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC

ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC הוא 2 ס"מ.

מצא את אורך הקטע AE.

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**
(40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos(4x)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.
a ו- b הם פרמטרים.

לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.
נתון כי $b < 0$.

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ד. (1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x) dx$.

(2) בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חותך את

ציר ה- x בנקודה אחת שבה $x = k$.

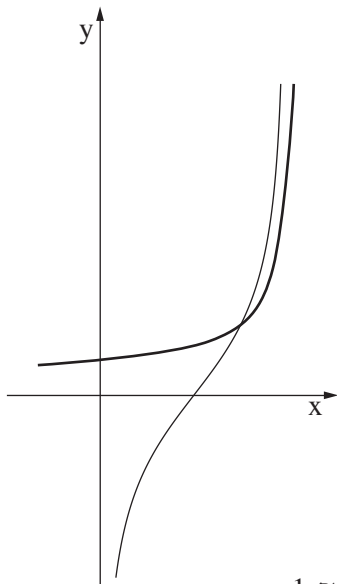
בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq k$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, שווה ל- S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישר $x = \frac{2\pi}{3}$ בתחום $k \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$. נמק.

הערה: אין צורך למצוא את $f''(x)$.



7. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

$g(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$

(ראה ציור).

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,

ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים

של הפונקציה $f(x)$,

ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים

של הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים

של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$.

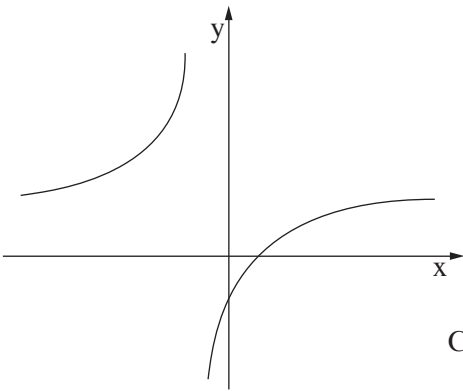
ג. נתונות הפונקציות: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + 2$, $t(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} + 2$,

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $t(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2 , קטן ממנו או שווה לו? נמק.

/המשך בעמוד 7/



8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,

ואת האסימפטוטות של הפונקציה
המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- x .

הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C

ואת הישר $y = 2x$ בנקודה D.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה C ב- t .

מצא מה צריך להיות הערך של t , כדי שהאורך של הקטע CD יהיה מינימלי:

(1) עבור $t > -1$.

(2) עבור $t < -1$.

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע CD עבור כל $t \neq -1$.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - חורף - 2016

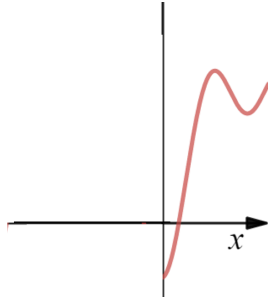
1. א. פי 4, ב. 3.75 שעות

2. א. $a_1 = 1$, $q=2$ ב. (1) סדרה נ עולה, סדרה || קבועה. (2) 6 איברים (3) 20

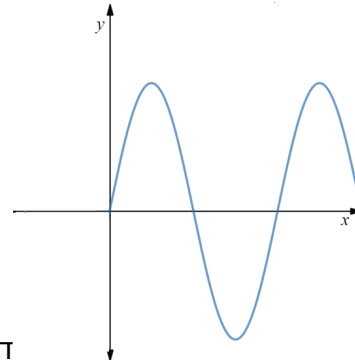
3. א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{3}{5}$

4. א. הוכחה ב. DM קצר יותר, ג. הוכחה

5. א. $\alpha = 20^\circ$ ב. 2.79 ג. 1.46



6. א. $\max(\frac{2\pi}{3}, -3.5b)$, $\min(\frac{\pi}{2}, -3b)$, $\max(\frac{\pi}{3}, -3.5b)$, $\min(0, b)$ ב.



ט. (1) 0.1 (2) S

ג.

7. א. (1) $x < 3$, $f(x)$ (2) $0 < x < 3$, $f(x)$: $y=0$, $x=3$: $g(x)$, $x=0$, $x=3$ ב. 0.6945 ג. שווה.

8. א. $x \neq -1$, אנכית $x=1$, אופקית $y=1$ ב. (1) $t=0$ (2) $t=-2$ ג. 0.5

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
 ב. בגרות לנבחנים אקסטראניים
 מועד הבחינה: קיץ תשע"ה, מועד ב
 מספר השאלון: 316,035806
 נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| במישור | | | — | 20×1 | — | 20 נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | | — | סה"כ | — | 100 נקודות |

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- לטיטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטיטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו, ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס. כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה, ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו. מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו, והיא $\frac{1}{7}$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס. כל המהירויות הן קבועות.
 - א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו?
- ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימו (בכיוון ההליכה שלה).
 - א. מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.
 - ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?

$$2. \quad \text{נתונה סדרה } b_n \text{ המקיימת את הכלל } b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$$

א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית,

וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.

ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- $3\frac{7}{16}$.

מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

3. חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים

אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

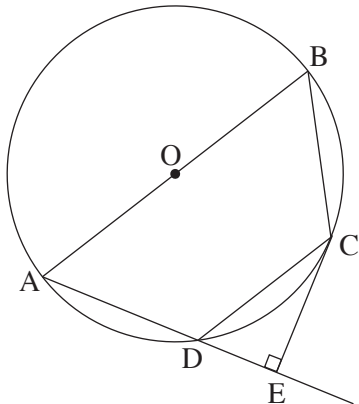
(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים

במשך היום?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O.

הצלע AB היא קוטר.

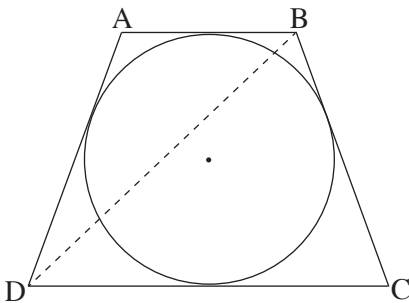
E היא נקודה על המשך AD כך ש- $CE \perp AE$.

א. הוכח: $\triangle CDE \sim \triangle ABC$.

נתון גם: $OD \perp AC$, $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}$.

ב. הוכח כי $OC \parallel AD$.

ג. הוכח כי CE משיק למעגל.



5. מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה-שוקיים ABCD

($AB \parallel DC$), כמתואר בציור.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r:

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז

ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$, ונתון התחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו-ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי־זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - a$.

(1) מצא את הערכים האפשריים של a שעבורם יש

למשוואה $f(x) - a = 0$ פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מהערכים של a שמצאת

בתת־סעיף ב (1).

7. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

הישר $y = \frac{1}{3}x + 3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת-סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות, I ו-II: $I. \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = k$, $II. \sqrt{x^2 + 9} = k$

נתון כי $k > 0$.

מצא את תחום הערכים של k שעבורם

אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II.

8. נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ מוגדרת בתחום $x > 0$.
- נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1$, $f'(x)$ עולה בתחום $0 < x < 3$, ויורדת בתחום $x > 3$, האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x = 0$ ו- $y = 0$.
- א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
- נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x = 0$.
- ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup וכלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$. נמק.
- ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y \geq 4$ ורק אותם. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ציין על ציר ה- x ועל ציר ה- y את הערכים שמצאת.
- ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -[f(x)]^3$. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - מועד ב' - 2015

1. א. 150 שניות ב. 240 שניות

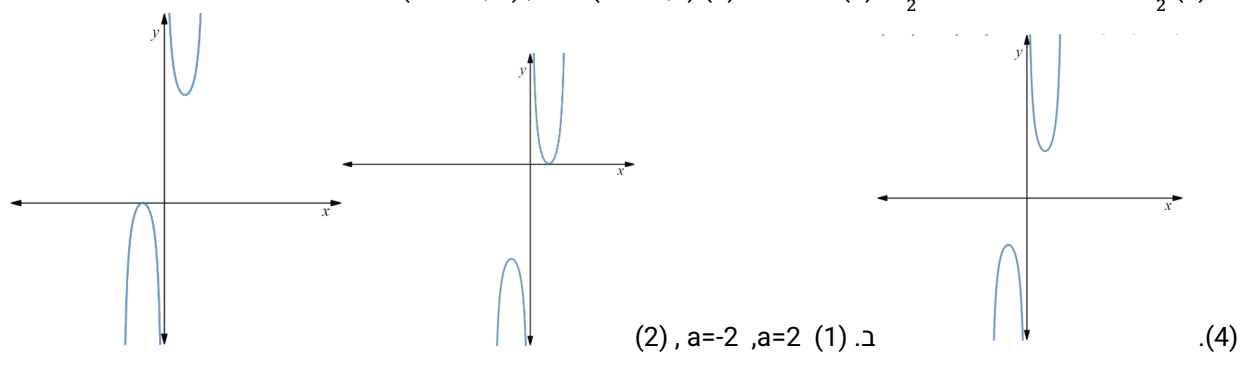
2. א. הוכחה, ב. $\frac{1}{3}$ או 1.6

3. א. (1) 80% (2) 0.832 ב. (1) 8% (2) 0.909

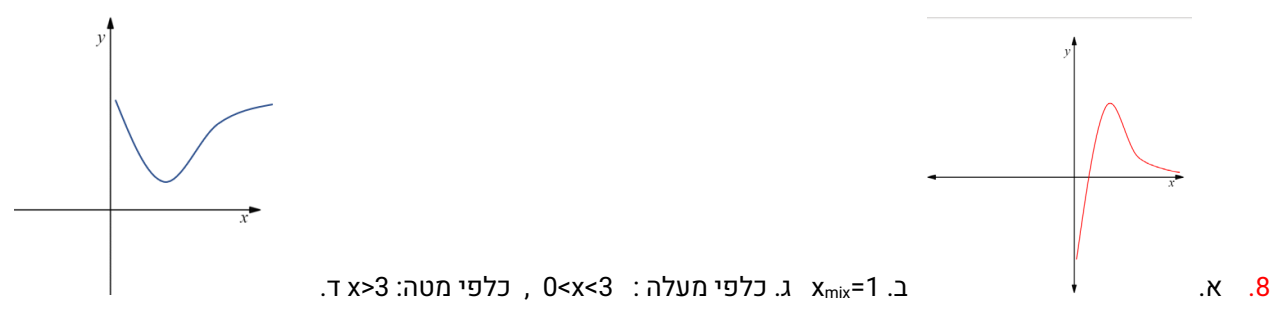
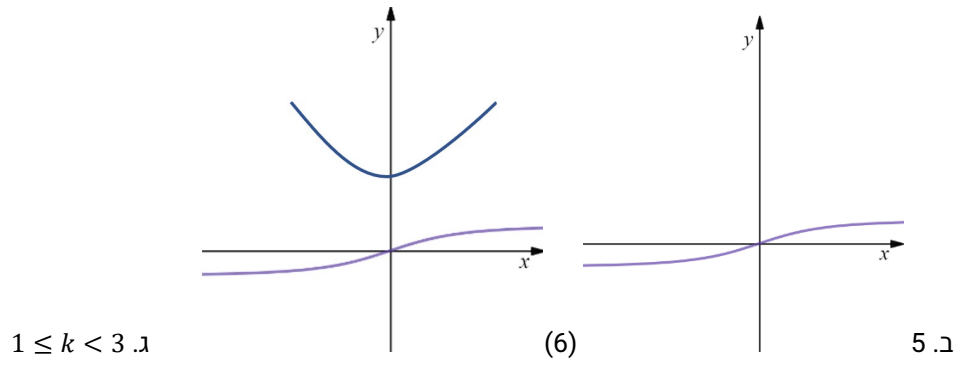
4. הוכחות

5. א. (1) 2.85r (2) 2.13r (3) 2.92r ב. 0.644

6. א. (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (2) אי זוגית. (3) $\max(-0.785, -2), \min(0.785, 2)$



7. א. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ ב. (1) $f(x)$ כל x , $f'(x)$ כל x ב. (2) $y=1, y=-1$ (3) $(0,0)$ (4) עלייה כל x , ירידה אין



ה. עלייה: $0 < x < 1$, ירידה $x > 1$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
מועד הבחינה: ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מספר השאלון: קיץ תשע"ה, 2015
נספח: 316,035806
דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | 20×1 | — | 20 נקודות |
| | | | | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | | | סה"כ | — | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

- מכונית I ומכונית II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון.
המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש.
כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצאה גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון.
ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ.
המהירויות של כל המכוניות היו קבועות.
 - מצא את המהירות של מכונית III.
 - האם ייתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I? נמק.
- נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.
 - מצא את המנה של הסדרה a_n .
 - נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.
 - (1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
 - (2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460.

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

3. נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ-0), והשאר הן ספרות אי-זוגיות.

יוני יוצר מספר דו-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי-זוגי היא $\frac{4}{7}$.

מהו מספר הספרות האי-זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

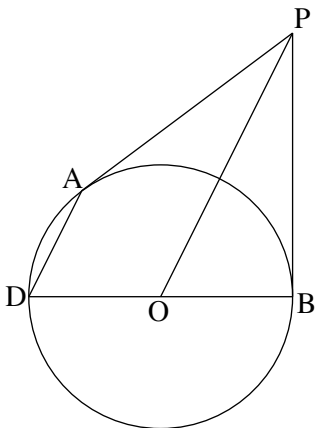
ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.

מהי ההסתברות שבמספר התלת-ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. PA ו- PB משיקים למעגל שמרכזו O.

המשך BO חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).

א. הוכח: $AD \parallel PO$.

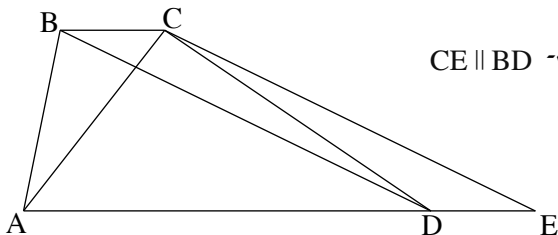
הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כך ש- $AC \perp DB$.

ב. הוכח: $\triangle ADC \sim \triangle POB$.

PD חותך את AC בנקודה E.

ג. הוכח: $\triangle DEC \sim \triangle DPB$.

ד. הוכח: $AC = 2EC$.



5. נתון טרפז $ABCD$ ($BC \parallel AD$).

הנקודה E נמצאת על המשך AD כך ש- $CE \parallel BD$ (ראה ציור).

נתון: $\angle CAD = 2\angle DBC$

$$DB = 1.8AC$$

א. מצא את גודל הזווית $\angle CEA$.

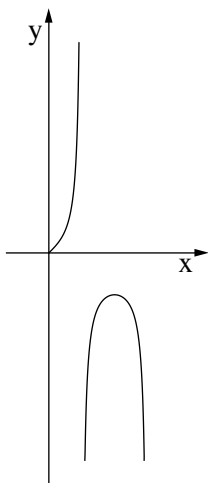
ב. נתון גם כי שטח המשולש ACE הוא 87.873 סמ"ר.

מצא את גובה הטרפז.

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ (ראה ציור).

ענה על הסעיפים א, ב רג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{6}$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.
על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.
- ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים, גדול מ-4, קטן מ-4 או שווה ל-4? נמק.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + a^2$, a הוא פרמטר גדול מ-0.

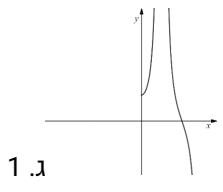
- א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה שבה $y > 0$.
- ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של a נקודת המינימום של הפונקציה:
- (1) נמצאת על ציר ה- x .
(2) נמצאת מעל ציר ה- x .
(3) נמצאת מתחת לציר ה- x .
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.
- ד. כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 = 0$? נמק.

בהצלחה!

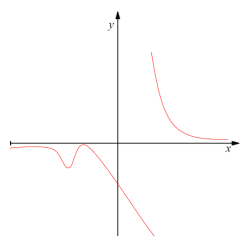
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - קיץ - 2015

- 1. א. 60 קמ"ש ב. לא
- 2. א. 0.5 ב. (1) הוכחה ב. (2) $\frac{1}{20}$
- 3. א. 4 ספרות אי זוגיות ב. $\frac{7}{15}$ ג. $\frac{1}{3}$
- 4. הוכחות
- 5. א. 25.8 ב. 7.8 ס"מ



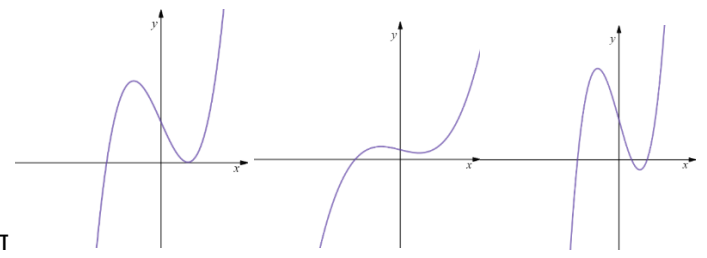
- 6. א. (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, (2) $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, (3) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ ב. $\min(0,0)$ $\max(\frac{\pi}{2}, -1)$ ג. 1



- 7. א. (1) $x \neq 1$ (2) $x=1$ (3) $y=0$, (4) $(-2,0)$, (5) $\min(-8, 4/81)$, $\max(-2,0)$

ב. נקודת פיתול בתחום $x < -8$, נקודת פיתול בתחום $-8 < x < -2$, ג. קטן מ-4

- 8. א. הוכחה, ב. (1) $a=1.5$ (2) $0 < a < 1.5$ (3) $a > 1.5$
- ג. $a > 1.5$
- א. $a = 1.5$
- ב. $0 < a < 1.5$



ד. פתרון אחד

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ה, 2015
מספר השאלון: 316,035806
נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|---------------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| במישור | | | — | 20×1 | — | 20 נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | | | סה"כ | — | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. צִבְעִים ותיקים וצִבְעִים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות.
צִבְע אחד ותיק ו-2 צִבְעִים מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב-25% מהזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צִבְעִים ותיקים וצִבְע אחד מתלמד.
לכל צבע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צבע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי משתנה. (צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מתלמד).
א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.
ב. מצא כמה צבעים מתלמדים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.

◀ המשך בעמוד 3

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

3. ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

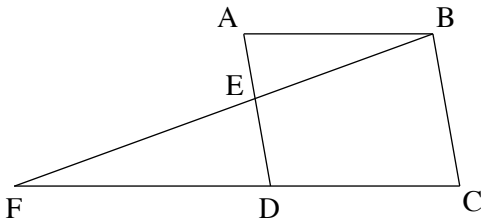
מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

המשך בעמוד 4 ◀

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על

הצלע AD .

המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F

(ראה ציור).

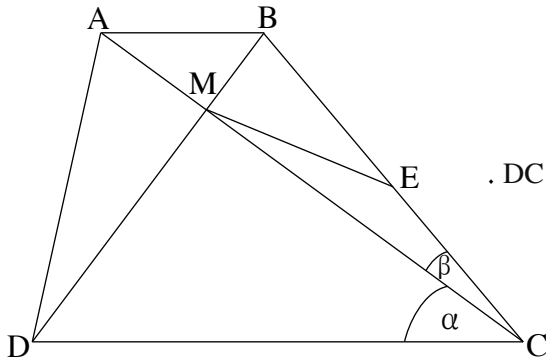
נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.

שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.

א. מצא את שטח המשולש BED .

ב. נתון גם כי המרובע BCDE הוא בר חסימה במעגל.

מצא את היחס $\frac{AB}{EF}$.



5. אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה

ונפגשים בנקודה M .

E היא אמצע השוק BC (ראה ציור) .

נתון: $DC = a$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$.

א. הבע באמצעות a , α ו- β

את האורך של ME .

נתון: $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{1}{3}$, $a = 6.6$ ס"מ .

ב. מצא את האורך של AB .

נתון גם: $BM = 1.3$ ס"מ .

ג. מצא את הזווית DCB .

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

(40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = 0.5 \sin(2x) + \cos x$$

$$g(x) = \sin(2x)$$

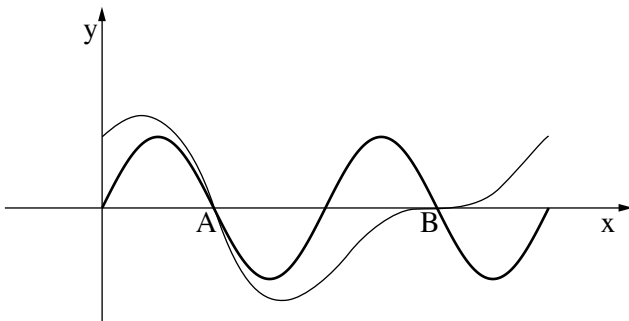
בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

בתחום הנתון

הגרפים של הפונקציות

נפגשים בשתי נקודות, A ו-B,

הנמצאות על ציר ה-x, כמתואר בציור.



א. דרך נקודה על ציר ה-x, הנמצאת בין הנקודות A ו-B, מעבירים אנך לציר ה-x.

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות f(x) ו-g(x) בנקודות M ו-N.

מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN.

ב. דרך נקודה על ציר ה-x, הנמצאת בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר ה-x.

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות f(x) ו-g(x) בנקודות K ו-L.

מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL.

7. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 2}}$$

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות:

(1) את תחום ההגדרה.

(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = g(x) - k$, $k > 0$.

עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$? נמק.

8. נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מקיימות $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} dx = 3$.

נתון גם: $f(0) = 1$, $f'(x) = kx + 2$. k הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של $f(3)$, ומצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(1) הראה כי $g(x) = |x + 1|$.

(2) סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

מתמטיקה - 35581 - פתרון - חורף - 2015

1. א. (1) 2, (2) 3

2. א. 202 ב. הונחה ג. 104 ד. 10,304

3. א. 64/729, ב. 8/11

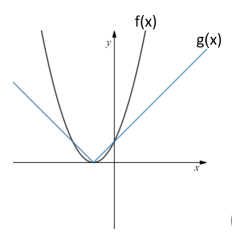
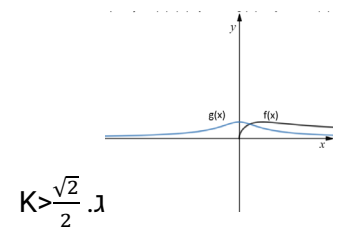
4. א. 36 סמ"ר ב. 0.75

5. א. $ME = \frac{a \cos \sigma}{2 \cos \beta}$ ב. 2.2 ס"מ AB = ג. 49.94

6. א. 1.3 ב. 1

7. א. (1) $f(x)$, $x \geq 0$, $g(x)$ לכל x , (2) $y=0 - f(x)$, $y=0 - g(x)$.

(3) $f(x)$: $\max(1, 1/\sqrt{2})$, $\min(0,0)$, $g(x)$ $\max(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ב.



8. א. $f(3)=16$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ב. (1) הונחה (2)