

5 יח"ל - 581 - יחידה 9 - משוואות טריגונומטריות

דוגמה:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

על מנת למצוא את ה-x המתאים יש ללחוץ במחשבון shiftcos ואז להזין

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30$$

למשוואות טריגונומטריות יש מחזוריות בפתרונות, ל-cos המחזוריות היא 360 כמו כן

מכיוון ש-cos היא פונקציה זוגית אז יש לה פתרון נוסף של 60-

לכן הפתרון הסופי והכללי הוא :

$$x = \pm 30 + 360k$$

דוגמה נוספת :

$$-2\sin x = 1$$

תחילה נחלק את שני צידי המשוואה ב-2 ונקבל :

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

יש ללחוץ במחשבון shiftsin ואז להזין $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -30$

למשוואות טריגונומטריות יש מחזוריות בפתרונות, ל-sin המחזוריות היא 360 כמו כן

מכיוון ש-sin היא פונקציה אי זוגית אז יש לה פתרון נוסף של $180 - (-30) = 210$

לכן הפתרון הסופי והכללי הוא : $x = -30 + 360k$ או $x = 210 + 360k$

דוגמה נוספת :

$$\tan(2x - 15) = 1$$

יש ללחוץ במחשבון shifttan ואז להזין $\tan^{-1}(1) = 45$

למשוואות טריגונומטריות יש מחזוריות בפתרונות, ל-tan המחזוריות היא 180

נקבל

$$2x - 15 = 45 + 180k$$

לאחר פישוט

$$x = 30 + 90k$$

1. פתרו את המשוואות הבאות

א. $\cos x = \frac{1}{2}$

ב. $2\sin x = -1$

ג. $\tan 2x = \sqrt{3}$

ד. $\cos(30 - x) = \frac{1}{2}$

ה. $\sin(x - 20) = 1$

ו. $\frac{1}{4}\sin x = \frac{1}{2}$

דוגמה :

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

נפעיל שורש על שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{או} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

על מנת למצוא את הערך המתאים ל-x נשתמש ב shiftcos נקבל:

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150 \quad \text{או} \quad \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30$$

למשוואות טריגונומטריות יש מחזוריות בפתרונות, ל-cos המחזוריות היא 360

ומכיוון ש-cos היא פונקציה אי זוגית

נקבל

$$x = \pm 30 + 360k \quad \text{או} \quad x = \pm 150 + 360k$$

2. פתרו את המשוואות הבאות

א. $\tan^2 x = \frac{1}{3}$ ב. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ ג. $\cos^2(x - 30) = 1$

ד. $2\tan^2 x - 1 = 0$ ה. $1 - 4\cos^2 x = 0$ ו. $\sin^2(2x + 15) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ז. $\sin \frac{30}{x} = \frac{1}{2}$ ח. $\cos \frac{1}{2x} = 1$ ט. $\tan \frac{30}{x} = \sqrt{3}$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

דוגמה :

$$\sin(90 + x) = -\sin(x)$$

נוכל לבחור בזהות ש $\sin(-x) = -\sin x$ "ולשנות את צד ימין של המשוואה"

$$\sin(90 + x) = \sin(-x)$$

מכיוון שמשני המשוואה כעת יש ש- \sin (ללא המינוס) נוכל להשוות את הביטויים בסוגרים:

*יש לשים לב שלסינוס יש פתרון נוסף של $(180 - \alpha)$ לכן נקבל

$$90 + x = 180 - (-x) \quad \text{או} \quad 90 + x = -x$$

למשוואות טריגונומטריות יש מחזוריות בפתרונות, ל- \sin המחזוריות היא 360 - נקבל

$$90 + x = 180 - (-x) + 360k \quad \text{או} \quad 90 + x = -x + 360k$$

לאחר העברת אגפים ופישוט

$$0x = 90 + 360k \quad \text{או} \quad 2x = -90 + 360k$$

פישוט אחרון

$$0x = 90 + 360k \quad \text{או} \quad x = -45 + 180k$$

סופי

$$x = -45 + 180k$$

דוגמה נוספת

$$\sin(30 + x) = -\cos(2x)$$

נוכל לבחור בזהות ש $\cos(x) = \sin(90 - x)$ "ולשנות את צד ימין של המשוואה"

$$\sin(30 + x) = -\sin(90 - 2x)$$

נוכל לבחור בזהות ש $\sin(-x) = -\sin(x)$ "ולשנות את צד ימין של המשוואה"

$$\sin(30 + x) = \sin(-(90 - 2x))$$

לאחר סידור

$$\sin(30 + x) = \sin(2x - 90)$$

למשוואות טריגונומטריות יש מחזוריות בפתרונות, ל- \sin המחזוריות היא 360

נקבל

$$30 + x = 180 - (2x - 90) + 360k \quad \text{או} \quad 30 + x = 2x - 90 + 360k$$

לאחר העברת אגפים ופישוט

$$3x = 240 + 360k \quad \text{או} \quad -x = -120 + 360k$$

פישוט אחרון

$$x = 80 + 120k \quad \text{או} \quad x = 120 + 360k$$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

זהויות - בסיס

$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(90 - x) = \cos x$	$\sin(180 - x) = \sin x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(90 - x) = \sin x$	$\cos(180 - x) = -\cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\tan(x + 180) = -\tan x$

3. פתרו את המשוואות הבאות

- א. $\cos x = \cos(90 - x)$
- ב. $\sin 2x = \sin(x - 30)$
- ג. $\sin(90 + x) = -\sin(x)$
- ד. $\cos x - \sin(x - 30) = 0$
- ה. $\tan(-x) = 3 + \tan x$
- ו. $-\cos x = \cos(2x - 30)$
- ז. $\cos(180 - x) + \sin(2x - 40) = 0$
- ח. $-\sin x = \cos(3x - 40)$
- ט. $-2\sin x + \sin(-x) = 2$
- י. $1 - \sin x = \cos(90 - x)$
- יא. $\cos(180 - x) - \cos(-x) = 1$
- יב. $\tan x = \sin x$

4. פתרו את המשוואות הבאות (בעזרת הוצאת גורם משותף)

- א. $\cos x + \cos x \cdot \sin 2x = 0$
- ב. $\sin x \cdot \tan x - 2 \sin x = 0$
- ג. $2\cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x = 0$
- ד. $\sin 2x \cdot \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0$
- ה. $\sin^2 x = \frac{2}{3} \sin x$
- ו. $2\cos^2 x - \cos x = 1$
- ז. $\sin^3 x = 4 \sin x + 3 \sin^2 x$
- ח. $\cos^3 x - 3\cos x = 0$
- ט. $\sin^2 x = 7 + 3 \cos^2 x$
- י. $\cos^2 x - 3\sin x - 1 = 0$
- יא. $\tan x \cdot \cos 2x + \tan x = 0$
- יב. $\sin x = 2\cos^2 x \cdot \sin x$

פתרון משוואות בתחום סגור

דוגמה:

מצאו את פתרונות המשוואה: $\cos 3x = \frac{1}{2}$
 בתחום $-200 \leq x \leq 200$

פתרון כללי של השוואה הוא:

$$x = \pm 20 + 120k$$

כעת נמצא את הפתרונות המתאימים לתחום הנתון על ידי הצבה של $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

k	0	1	2	-1	-2
$x = 20 + 120k$	20	140	260	100	-220
$x = -20 + 120k$	-20	-100	220	-140	-260

*אין צורך להציב יותר מ-2 או פחות מ-2 מכיוון שהתוצאות יחרגו מהתחום

ניתן לראות שהתקבלו 6 פתרונות בתחום מהטבלה:

$$x = 20, -20, 100, -100, 140, -140$$

5. פתרו את המשוואות הבאות ומצאו את הפתרונות המתאימים לתחום הנתון

א. $\sin x = 0$ $-270 \leq x \leq 270$

ב. $\cos(x + 20) = \frac{1}{2}$ $0 \leq x \leq 360$

ג. $\tan 2x = 1$ $-270 \leq x \leq 0$

ד. $\cos x \sin x = 0$ $-180 \leq x \leq 180$

ה. $\sin x = \cos(x + 20)$ $-90 \leq x \leq 90$

ו. $2 \tan(x - 30) - 2 = 0$ $-60 \leq x \leq 60$

ז. $\sin^2 x + \cos 2x = 0$ $-200 \leq x \leq 200$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

6. פתרו את המשוואות הבאות בתחום הנתון משמאל

א.
$$\frac{\cos x}{\sin(x-\pi)} = 0 \quad -270 \leq x \leq 270$$

ב.
$$\frac{\cos 2x}{\sin(x-\pi)} = 0 \quad 0 \leq x \leq 360$$

ג.
$$\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)} = 0 \quad -270 \leq x \leq 0$$

ד.
$$\frac{\tan 2x}{\sin(x-2\pi)} = 0 \quad -180 \leq x \leq 180$$

ה.
$$\frac{\cos(\pi-x)}{\sin\left(\frac{1}{2}x-\pi\right)} = 0 \quad -90 \leq x \leq 90$$

ו.
$$\frac{\tan(3x)}{\cos(x-\pi)} = 0 \quad -60 \leq x \leq 60$$

7. פתרו את המשוואות הבאות

א.
$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

ב.
$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

ג.
$$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x-\pi) = 4\cos\frac{x}{2}$$

ד.
$$\cos x \cdot \sin^2(x-\pi) - \cos x \cdot \sin(x-\pi) = 0$$

זהויות - זווית כפולה

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

8. פתרו את המשוואות הבאות (זווית כפולה)

א. $\sin 2x + 4 \sin x = 0$ ב. $\cos 2x + 5 \cos x = 2$

ג. $\sin 2x - 2 \cos x = 0$ ד. $\cos^2 x + \sin 2x = 0$

ה. $\sin x + \cos 2x + 2 = 0$ ו. $2 \cos^2 x + \cos 2x = 0$

9. פתרו את המשוואות הבאות (זווית כפולה)

א. $\sin 2x + \sin^2 x \cdot \cos x = 0$ ב. $3 \sin x - 4 \cos 2x = -3$

ג. $\sin 2x + \cos 2x = -1$ ד. $3 \sin 2x \cdot \sin x - \cos x = 0$

ה. $\sin 4x + 4 \sin x \cdot \cos 2x = 0$ ו. $3 - 2 \cos 2x = 5 + 3 \sin 2x$

ז. $\sin 4x - \cos 4x = 1$ ח. $5 \sin 2x \cdot \sin x - \cos x = 0$

10. פתרו את המשוואות הבאות (זווית כפולה)

א. $\sin 3x - 2 \sin 6x = 0$ ב. $2 \sin 8x + 5 \cos 4x = 0$

ג. $\cos 6x + \cos 3x = 0$ ד. $\cos 2x + 1.25 = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$

ה. $\sin^2 x + \cos 4x = 1$ ו. $\sin \frac{1}{2} x \cdot \sin x = 1 + \cos x$

ז. $3 \cos 4x - 7 \cos^2 2x = 0$ ח. $6 \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 6 = 0$

ט. $\cos x - \sin \frac{1}{2} x = 1$ י. $\sin \frac{1}{2} x + \sin x = \cos x - 1$

יא. $\sqrt{2} \sin 2x = 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x + 2 \cos 2x$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

11. פתרו את המשוואות הבאות

- א. $\sin(80 - x) - 2\sin x = 0$
 ב. $\cos x + \cos(x - \pi) = 2$
 ג. $3 \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$
 ד. $\sin 3x + 2\sin x = 0$
 ה. $\cos 3x - 3 \cos^2 x = 0$
 ו. $\cos(2\pi - x) + \cos(x - \pi) = 2$

12. פתרו את המשוואות הבאות

- א. $\frac{3\cos x - \sin 2x}{\sin(x - \pi)} = 0$
 ב. $\frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = 0$
 ג. $\frac{1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)} = 0$
 ד. $\frac{\tan x \cdot \cos 2x - \tan x}{\sin(x - 2\pi)} = 0$

13. פתרו את המשוואות הבאות

- א. $\sin 2x + 2\sin^2 x = 2 \sin x$
 ב. $12 \tan^2 x + 18 \cos 2x = 13$
 ג. $2 \sin 2x = \tan 2x$
 ד. $2 \sin 2x = \frac{\sin 6x}{1 + \cos 6x}$
 ה. $\sin 1.5x \cos 1.5x \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{8}$
 ו. $\sin^2 x = \cos 4x$
 ז. $3\cos(5x) + 2 \sin 2x = 3\cos(3x)$
 ח. $\cos(4x)\cos(2x) + \sin(4x) \sin 2x = 1 - \cos(2x)$
 ט. $2\sin 2x \cos 2x = \sin(9x) - \sin(x)$

14. פתרו את המשוואות הבאות בתחום הנתון

ג. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin x = 0$

ה. $\frac{1}{2} \cos 2x + \cos 2x \cdot \sin x = 0$

ו. $4\cos^2 x - \cos x = 0$

ז. $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

ח. $\cos x + 2\sin(30 - x) = 0$

ט. $\cos 3x - \cos^2 x = 0$

י. $\sin(4x) - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 0$

יא. $\cos \frac{x}{2} + \sin 2x = 0$

יב. $\cos 2x - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

יג. $2\sin^2 2x - \sin 4x \cdot \cos x = 4 \cos^2 x$

יד. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$

יח. $\cos^2 x - 3 \cos^2 x = 0$

יט. $\frac{1}{2} - \sin^2 x \cdot \cos(x + 30) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \sin(x + 30)$

דוגמאות לפתרון מלא

דוגמה 1.

$$3 \sin x = \sin(x - 30)$$

$$3 \sin x = \sin x \cos 30 - \sin 30 \cos x$$

$$3 \sin x - \sin x \cdot \cos 30 = \sin 30 \cdot \cos x$$

$$(3 - \cos 30) \sin x = -\frac{1}{2} \cos x \quad /: \cos x$$

$$(3 - \cos 30) \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\tan x = \frac{-1}{2(3 - \cos 30)}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{2(3 - \cos 30)}\right) = x$$

$$x = -13.18 + 180k$$

דוגמה 2

$$\frac{2}{3} \sin^2 x + \cos 2x = 0$$

$$\frac{2}{3} \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x = 0$$

$$1 = \frac{4}{3} \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 60 + 360k$$

$$x = -60 + 360k$$

$$x = 120 + 360k$$

$$x = 240 + 360k$$

דוגמה 3

$$\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$$

$$\cos(90 - 2x) - \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$$

$$-2 \sin \frac{90 - 2x + 2x}{2} \sin \frac{90 - 2x - 2x}{2} = \sqrt{2} \sin x$$

$$-2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{90 - 2x - 2x}{2} \right) = \sqrt{2} \sin x$$

$$-\sin \left(\frac{90 - 4x}{2} \right) = \sin x$$

$$\sin \left(-\frac{90 - 4x}{2} \right) = \sin x$$

$$\sin (2x - 45) = \sin x$$

$$2x - 45 = x + 360k$$

$$2x - 45 = 180 - x + 360k$$

$$x = 45 + 360k$$

$$3x = 225 + 360k$$

$$x = 45 + 360k$$

$$x = 75 + 120k$$

דוגמה 4

$$\sin 3x - \cos 3x = 1$$

$$(\sin 3x - \cos 3x)^2 = 1^2$$

$$\sin^2 3x - 2 \sin 3x \cos 3x + \cos^2 3x = 1$$

$$-2 \sin 3x \cos 3x + \cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$$

$$-2 \sin 3x \cos 3x + 1 = 1$$

$$-2 \sin 3x \cos 3x = 0$$

$$\sin 6x = 0$$

$$6x = 180k$$

$$x = 30k$$

דוגמה 5

$$\sin 5x + \sin x - 2 \cos^2 x = -1$$

$$2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} - 2 \cos^2 x = -1$$

$$2 \sin 3x \cos 2x - 2 \cos^2 x = -1$$

$$2 \sin 3x \cos 2x - (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$2 \sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 3x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad 2 \sin 3x - 1 = 0$$

$$2x = 90 + 180k$$

$$x = 45 + 90k$$

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$3x = 30 + 360k$$

$$3x = 150 + 360k$$

$$3x = 10 + 120k$$

$$3x = 50 + 120k$$

דוגמה 6

$$5 \sin 3x - 5 \cos 3x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$(5 \sin x - 5 \cos x)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$25 \sin^2 x - 50 \sin x \cos x + 25 \cos^2 x = \frac{25}{2}$$

$$25 - 25 \sin 2x = \frac{25}{2}$$

$$\frac{25}{2} = 25 \sin 2x$$

$$\frac{1}{2} = \sin 2x$$

$$\begin{aligned} 2x &= 30 + 360k & 2x &= 150 + 360k \\ x &= 15 + 360k & x &= 75 + 360k \end{aligned}$$

דוגמה 7

$$2 \sin^2 x + \cos 4x = 1$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 2x - 1 = \cos 2x$$

$$\cos 2x = t$$

$$2t^2 - 1 = t$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t = 1 \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = 1 \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = 360k \quad 2x = \pm 60 + 360k$$

$$x = 180k \quad x = \pm 30 + 180k$$

דוגמה 8

$$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2 \sin x \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = -30 + 360k \quad 2x = 210 + 360k$$

$$x = -15 + 360k \quad x = 105 + 360k$$

דוגמה 9

$$2 \sin^2 2x + \sin^2 x = 1$$

$$2 \sin^2 2x = 1 - \sin^2 x$$

$$2 \cdot 4 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x$$

$$8 \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x (8 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \quad 8 \sin^2 x = 1$$

$$\cos x = 0 \quad \sin^2 x = \frac{1}{8}$$

$$\cos x = 0 \quad \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$