

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

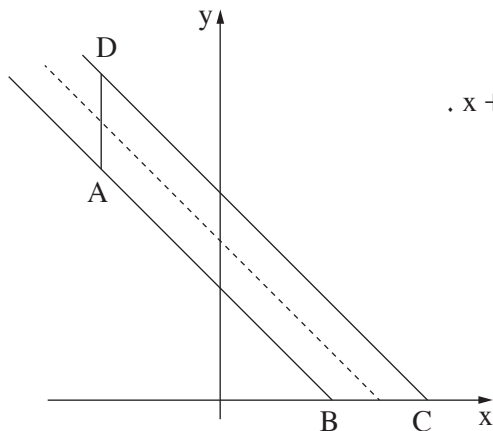
השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).

נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז, AB ו-DC, הוא $\sqrt{2}$,

קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על הישר $x + y - 4 = 0$.

א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז נמצאים עליהם.

נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה-x.

מעבירים פרבולה קנונית $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

כך שהקודקודים A ו-D של הטרפז נמצאים על מדרג הפרבולה,

ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. (1) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה

הטרפז ABCD הוא הגדול מבין שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה הטרפז ABCD הוא הקטן מבין שני הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה-x וחותר את שתי הפרבולות שמצאת בסעיף ב בשתי נקודות, E ו-F.

מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

2. ABC הוא משולש.

$$\vec{AC} = \underline{v}, \vec{AB} = \underline{u} \text{ נסמן:}$$

$$\text{נתון: } A(0, 2, -1), B(-3, 2, 2)$$

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \text{ הנקודה } D(-2, 3, 1) \text{ נמצאת על הקטע } BC \text{ כך ש-}$$

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

(2) מצא את משוואת המישור ABC.

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש- ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש האלכסונים במלבן זה.

S היא נקודה כך ש- MS מאונך למישור ABEC.

ב. (1) מצא הצגה פרמטרית לישור MS, והסבר מדוע לכל נקודה S כזו SABEC היא פירמידה ישרה.

(2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת-סעיף ב(1).

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB.

(3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P, כך ש- PABEC היא פירמידה ישרה שבעבורה

$$\angle SAB = \angle PAB \text{ מתקיים?}$$

אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.

3. נתונה המשוואה $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך

ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w.

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

$$\text{נתון: } w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו

לאחר ההכפלה ב-w.

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. הסבר מדוע לכל $b < 0$ מתקיים: $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$.
 נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. k הוא פרמטר.
 נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום.
 ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור k ? נמק.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (k הוא פרמטר). מצא את k . נמק.
- ג. נגדיר $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$ $e^{-1} \leq x < e$.
 (1) לפניך שלושה ערכי x , (III-I). בעבור איזה מהם הערך של $T(x)$ הוא הכי גדול? נמק.
 $x = \frac{1}{2}$ (I) $x = 1$ (II) $x = 2$ (III)
 (2) הסבר מדוע בעבור כל $e^{-1} \leq x < e$ מתקיים: $T(x) < 1$.

בהצלחה!

5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - חורף תשפ"א - 3.2.2021

1. א. $AB: y = -x + 3, CD: y = -x + 5$ ב. $y^2 = 20x$. (1) $y^2 = 12x$. (2) $y^2 = 15x$ ג. $y^2 = 15x$

2. א. (1). $C(0,5,-1)$, הוכחה $(\sphericalangle A = 90^\circ)$. (2). $x + z + 1 = 0$

ב. (1). $(-1.5, 3.5, 0.5) + t(1, 0, 1)$. (2). $S(-1, 3.5, 1)$, $\sphericalangle SAB = 38.016^\circ$

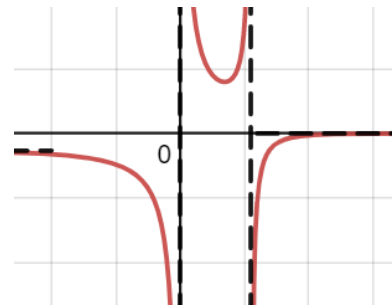
(3). $P(-2, 3.5, 0)$

3. א. $\frac{1}{2} \text{cis} 45^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 105^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 165^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 225^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 285^\circ, \frac{1}{2} \text{cis} 345^\circ$

ב. הוכחה ג. הוכחה ד. $(z^6 - \frac{1}{64}i)(z^6 + \frac{1}{64}i) = 0$

4. א. (1). $x \neq 0, x \neq \ln 3$. (2). $x = \ln 3, x = 0, y = 0, y = -\frac{4}{3}$. (3). $(\ln 2, 4)$ נקודת מינימום

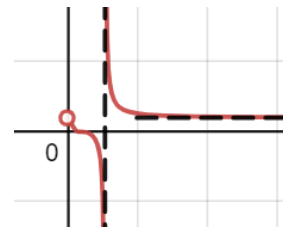
(4). תחום עלייה: $\ln 3 < x$ או $\ln 2 < x < \ln 3$ תחום ירידה: $0 < x < \ln 2$ או $x < 0$



ב. הוכחה ג. $k < 0$

5. א. (1). $x > 0, x \neq e$. (2). $x = e, y = 1$. (3). תחום עלייה: אף א,א

תחום ירידה: $0 < x < e$ או $x > e$. (4). (1, 0)



(5).

ב. $k = 1$ ג. (1). אפשרות 2: $x = 1$. (2). הסבר

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה $y^2 = 36x$ ברביע הראשון.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר AB הוא $m = \frac{36}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $(x, 7\frac{1}{2})$ היא אמצע המיתר AB.
מצא את m.

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר $x = a$ שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה $(9, 0)$.

מרחק הנקודה A מן הישר $x = 0.75a$ הוא 7.

(1) מהו הערך של a? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר AB.

2. נתון טרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$) (ראה סרטוט).

נתון: $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\vec{DC} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = t\underline{u}$ (t הוא סקלר).

א. (1) הבע את t באמצעות $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

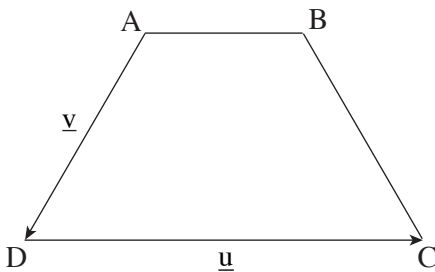
(2) הבע את הווקטור \vec{BC} באמצעות $|\underline{u}|$, \underline{v} , \underline{u} ו- $|\underline{v}|$.

נתון: $\underline{v} = (-1, y, 0)$, $\underline{u} = (8, 6, -10)$.

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של הווקטור \underline{v} (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף (1), הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז

חסום בו? נמק.



3. א. נתון מספר מרוכב $z = r \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$.

הסבר מדוע מתקיים: $r \cdot [\cos(180^\circ + \theta) + i \cdot \sin(180^\circ + \theta)] = -z$.

z_1, z_2, z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו- z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה המייצגת את z_3 נמצאת ברביע השלישי.

נסמן $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$.

ב. הוכח כי המנה $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו- z_3 נמצאות על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_2, z_3, z_4 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x) = f(x^2)$, $g(x) = 2 \cdot f'(x)$ בתחום $x > 0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את סוגה,

והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי הישר $x = a$, $a > 1$,

שווה ל- $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$.

מצא את הערך של a . תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5. הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1 \leq x \leq 4$.

אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו- II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$

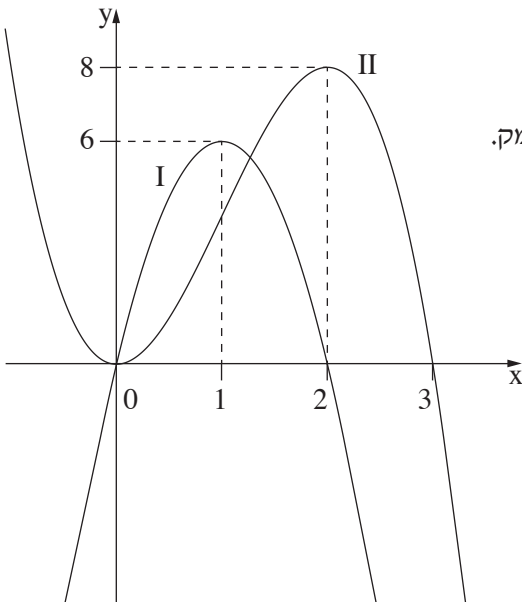
המאונכות לציר ה- x ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות

של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.



בהצלחה!

5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד נבצרים - חורף תשפ"א - 1.3.2021

1. א. (1). הוכחה (2). $m = 2.4$

ב. (1). $a = -9$. (2). $y = 2.4x + 2.4$

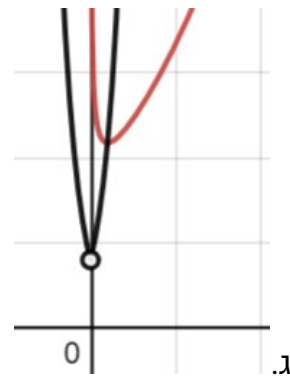
2. א. (1). $t = 1 - \frac{|v|}{|u|}$. (2). $\vec{BC} = \frac{|v|}{|u|}\vec{u} + \underline{v}$

ב. (1). $y = -7$, $y = \frac{1}{7}$. (2). $y = -7$

3. א. הוכחה ב. הוכחה

ג. $|z_2| = 3.5$ Δ $2.25 \sin 2\alpha$

4. א. $0 \leq x < 1.4e$ ב.



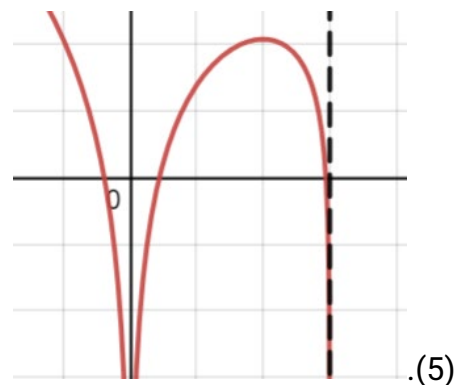
Δ $a = 4 - \ln 4$

5. א. גרף I - $f'(x)$, גרף II - $f(x)$

ב. (1). $0 < x < 3$, $-1 \leq x < 0$. (2). $x = 0, x = 3$

(3). $(2, \ln 8)$ נקודת מקסימום (4). תחום עלייה: $0 < x < 2$

תחום ירידה: $-1 < x < 0, 2 < x < 3$



מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה $y^2 = 4px$ ($p > 0$).

שיעור ה- y של נקודה K הוא 12.

המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20.

א. מצא את p (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף א ב- p_1 ו- p_2 . $p_1 < p_2$.

ישר מן הצורה $y = mx$ ($m \neq 0$) חותך את הפרבולה $y^2 = 4p_1x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, A ,

ואת הפרבולה $y^2 = 4p_2x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, B .

הצב את הערכים p_1 ו- p_2 שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.

ב. הבע את שיעורי נקודה A , ואת שיעורי נקודה B באמצעות m .

בעבור כל ישר $y = mx$ ($m \neq 0$), נסמן ב- M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

2. נתונה התיבה $ABCD A' B' C' D'$.

הנקודה K נמצאת על המקצוע CC' .

הנקודה E היא אמצע המקצוע $A'D'$ (ראה סרטוט).

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$; $\vec{AD} = \underline{v}$; $\vec{AB} = \underline{u}$; $\vec{CK} = t \cdot \vec{CC'}$ ($t > 0$ הוא סקלר).

נתון: $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$; $|\underline{v}| = 6$; $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$

. $\angle EKB = 90^\circ$

א. מצא את t .

נסמן ב- π את המישור $CDA'B'$.

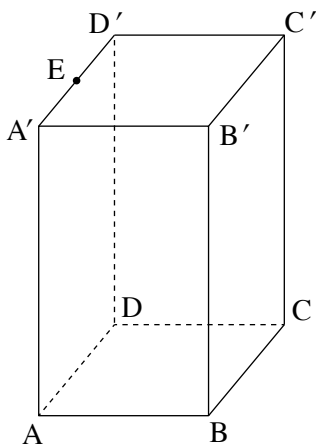
ב. (1) הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $B(-1, 0, 1)$; $K(4, 5, -1)$,

. $\underline{w} = (2, 2, -8)$

ג. מצא את משוואת המישור π .



3. א. פתור את המשוואה: $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$.

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס.

הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס.

דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים O . הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו- D .

במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות.

נתון כי הנקודות B, C, D הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה- n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב:

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x . הגרף שלה חותך את ציר ה- x בראשית הצירים בלבד. נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן $(1, 1)$ ו- $(-1, -1)$ בלבד. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x = 1$ ו- $x = -1$ בלבד. ציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.
- א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.
- (2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ (פונקציית הנגזרת של $g(x)$).
- נתונה הפונקציה $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$.
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- (4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.
5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$, $a \neq 0$, הוא פרמטר. ענה על סעיפים א-ג בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה. נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = f'(x)$ (נגזרת הפונקציה $f(x)$) המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נתון: $a > 0$.
- ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = \frac{2}{a}$ וציר ה- x , והוכח כי השטח אינו תלוי ב- a .

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד מאוחר - חורף תשפ"א - 19.4.2021

1. א. $P = 18$ או $P = 2$. ב. $A = (\frac{8}{m^2}, \frac{8}{m})$, $B = (\frac{72}{m^2}, \frac{72}{m})$. ג. $y^2 = 40x$.

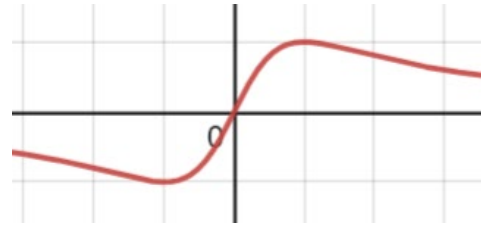
2. א. $t = \frac{1}{2}$. ב. (1). הוכחה. (2). הוכחה. ג. $5x + 5y - 2z - 29 = 0$.

3. א. $Z_1 = 1 - i, Z_2 = 2i$. ב. $n = 8$. ג. (1).

$(0, -2), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-2, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 2), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (2, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(2). $Z^8 = 256$.

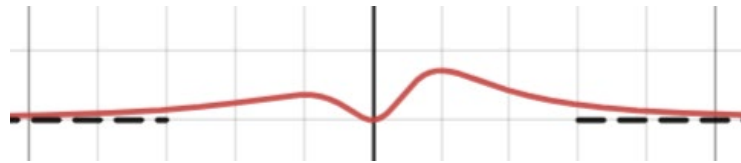
4. א. (1).



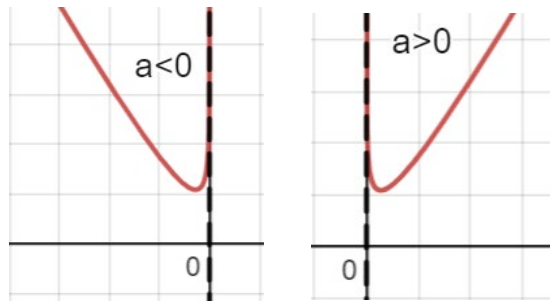
(2). תחום חיוביות: $-1 < x < 1$, תחום שליליות: $x < -1, 1 < x$. ב. (1). כל x .

(2). $y = 1$. (3). נקודת מקסימום, $(0, 1)$ נקודת מינימום,

(4). נקודת מקסימום. $(-1, \frac{1}{e} + 1)$.



5. א. $0 < x < a, a > 0$; $x < 0, a > 0$. ב. $(\frac{1}{a}, 1 + \ln a^2)$ נקודת מינימום לכל a . ג.



$1 - \ln 2$.

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שם לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שם לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

1. נתון פרמטר $a > 0$.

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a, 0)$ שווה

למרחק שלהן מן הישר $x = a - 1$.

ב. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(0, a)$ שווה

למרחק שלהן מן הישר $y = a - 1$.

נתון כי שני המקומות הגאומטריים שמצאת בסעיפים א-ב נחתכים בשתי נקודות. אחת הנקודות היא $(2, 2)$.

ג. (1) מצא את a .

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך האחרת.

מחברים את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים עם הנקודות $(3a, 0)$ ו- $(0, 3a)$ כך שמתקבל מרובע.

ד. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמק.

(2) חשב את שטח המרובע.

2. נתונה פירמידה מרובעת SABCD שבסיסה ABCD הוא מעוין.

נתון: \vec{SA} מאונך לבסיס הפירמידה, $\angle BAD = 60^\circ$, $SA = BA$, $\vec{SE} = t \cdot \vec{SC}$, $0 < t < 1$ הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

א. הבע את הווקטורים \vec{EB} ו- \vec{ED} באמצעות \underline{t} , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

ב. נתון: $t = \frac{1}{2}$.

(1) הוכח כי \vec{EB} מאונך ל- \vec{ED} .

(2) הוכח כי האנך מן הנקודה E לבסיס עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים של המעוין.

נתון: $A(0, 0, 0)$, $B(6\sqrt{3}, 6, 0)$, קודקוד D נמצא על ציר ה-y בכיוון החיובי,

שיעור ה-z של הנקודה S גדול מאפס.

ג. חשב את שיעורי הקודקודים S ו-D.

ד. מצא את משוואת המישור SAB.

3. נתונה המשוואה $z^4 = -16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

ג. כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע.

ד. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי, $11 < n < 17$ ו-c הוא מספר ממשי.

כל אחד מן המספרים המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה $z^n = c$.

ה. מצא את n ואת c.

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה $z^n = c$ שמצאת בסעיף ד, יוצרות

מצולע בעל n צלעות.

ו. מצא את שטח המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > 1$.
 בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.
- א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
 (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3)
- ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובתך.
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
 (3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר $x = \frac{\ln(a)}{2}$.
 מצא את שיעור ה- y של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.
 (1) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.
 (2)
- ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$.

5. א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{(x + 2)(x - 1)}\right)$.
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.
היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך.
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.
- ג. בעבור כל x המקיים $0 < f(x) < 1$, קבע אם המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ חיובית. נמק את קביעתך.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ב"ח 7"**
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - קיץ תשפ"א - 19.5.2021

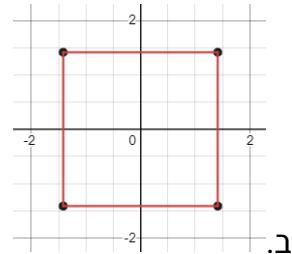
1. א. $y^2 = 2x - 2a + 1$ ב. $x^2 = 2y - 2a + 1$

ג. $a = 0.5$ (1). ד. $(0,0)$ (2). דלתון (3).

2. א. $\vec{ED} = (1-t)\underline{v} - t\underline{u} + (t-1)\underline{w}$ $\vec{EB} = (1-t)\underline{u} - t\underline{v} + (t-1)\underline{w}$

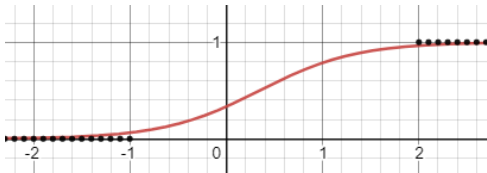
ב. (1) הוכחה (2) הוכחה ג. $D(0,12,0)$ $S(0,0,12)$ ד. $x - \sqrt{3}y = 0$

3. א. $2cis45^\circ, 2cis135^\circ, 2cis225^\circ, 2cis315^\circ$

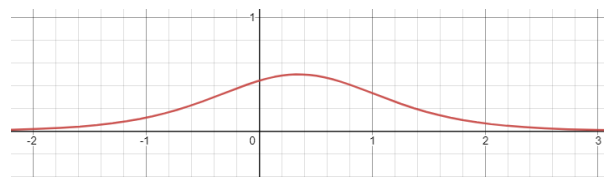


ג. $(0, -2), (0, 2), (-2, 0), (2, 0)$ ד. $n = 16, c = 65536, S = 12.25$ ה.

4. א. (1). $y = 1$ (2). תחום עלייה : אף X , תחום ירידה : כל X (3). $(0, 1+a)$



ב. (1) כל X (2). $y = 0, y = 1$ (3). $y = 0.5$



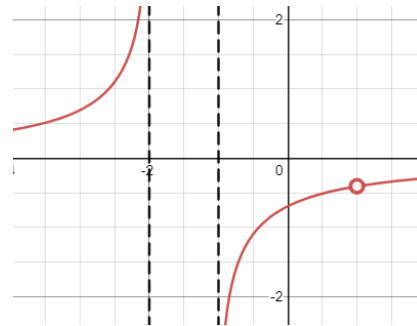
ג. (1) $(\frac{\ln a}{2}, \frac{1}{2})$ (2)

ד. $S = \frac{\ln a}{4} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2}$

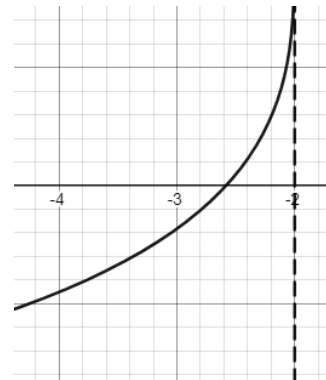
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ביח"ל**
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

5. א. (1) $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$. (2) $x = -1, x = -2, y = 0$.

(3) תחום עליה: $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$, תחום ירידה: אף X



ב. (1) $x < -2$. (2) תחום עלייה: $x < -2$, תחום ירידה: אף X



ג. לא, המכפלה שלילית בעבור כל X המקיים $0 < f(x) < 1$

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון פרמטר a שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a, -1)$ שווה למרחק שלהן מן הנקודה $(-a, 1)$ הוא קו ישר. הבע את משוואת הישר באמצעות a .

נתון הישר $y = -ax$.

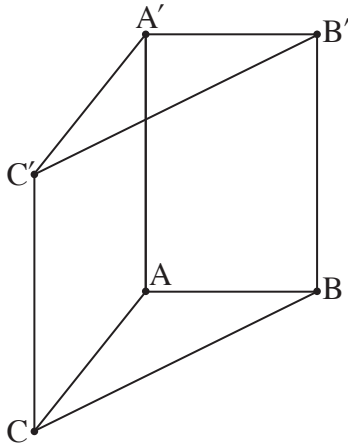
ב. מצא לאילו ערכים של a , הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א ניצבים זה לזה.

הישר שמצאת בסעיף א והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים, M ו- N . מרכזי שני המעגלים מונחים על ציר ה- x , המעגל M נמצא מימין לציר ה- y , והמעגל N נמצא משמאל לציר ה- y . נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6, והרדיוס של המעגל M גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל N .

ג. מצא את המשוואות של המעגלים M ו- N .

נתון הישר $-x + \sqrt{17}y - 8 = 0$. הישר משיק לשני המעגלים M ו- N .

ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.



2. בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, שהבסיס שלה הוא המשולש ABC .

נתון המספר k שבעבורו: $\vec{AA'} = (k-1, k-7, k+1)$,

$\vec{AB} = (k-1, k, 3)$, $\vec{AC} = (k+1, 0, k-3)$

א. מצא את ערכו של k .

המקצועות AC ו- BC מונחים על הישרים ℓ_{AC} ו- ℓ_{BC} בהתאמה:

$$\ell_{AC}: \underline{x} = (8, -1, -1) + t(k+1, 0, k-3)$$

$$\ell_{BC}: \underline{x} = (4, 0, 2) + m(k, -k, -4)$$

ב. מצא את משוואת המישור $A'B'C'$.

ג. חשב את גודל הזווית $C'A'B'$.

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש $A'B'C'$. נמק.

3. נתונה משוואה I: $w^2 - 4iw - 4 + 2i = 0$. w הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

נתונה משוואה: $z^3 = a + bi$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים.

ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1-3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a = 0$, $b > 0$

2. $a < 0$, $b = 0$

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$

נתונה משוואה II: $z^3 = 2(w_1 + w_2)$, w_1 ו- w_2 הם הפתרונות של משוואה I.

ג. פתור את משוואה II.

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה $u = di$, d הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים.

מצא את שתי האפשרויות.

**פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(4) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון הישר: $g(x) = a \cdot x$, a הוא פרמטר.

ידוע כי $g(1) = f(1)$.

- ג. (1) מצא את a .
(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $g(x)$.

5. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = x \cdot (\ln(x))^n$, $n \geq 1$, הוא מספר טבעי.

א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי-זוגי. אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n .

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

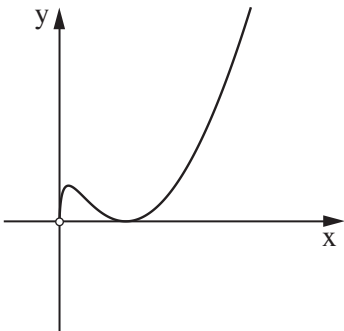
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

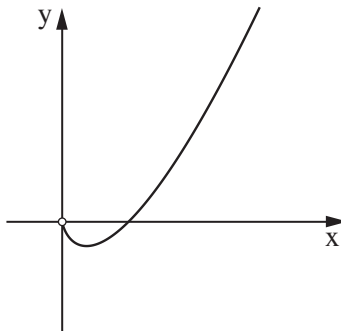
ב. כל אחד מן הגרפים א-ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.

קבע איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 1$, איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 2$ ואיזה גרף יכול להתאים ל- $n = 3$.

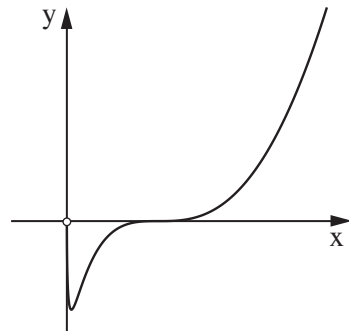
נמק את קביעותיך.



גרף ג



גרף ב



גרף א

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{e}$ ו- $x = \frac{1}{e^2}$.

בהצלחה!

5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד מיוחד - קיץ תשפ"א - 9.6.2021

1. א. $y = ax$, ב. $a = \pm 1$, ג. $(x-4)^2 + y^2 = 8$, $(2+x)^2 + y^2 = 2$

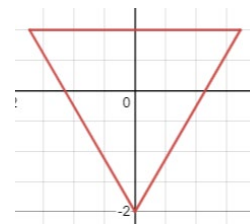
ד. $x + \sqrt{17}y + 8 = 0$

2. א. $k = 2$, ב. $x - 5y + 3z - 45 = 0$

ג. 90° , ד. $(5, -5, 5)$

3. א. $1+i$, $-1+i3$, ב. טענה 1

ג. $2\text{cis}30^\circ$, $2\text{cis}150^\circ$, $2\text{cis}270^\circ$ או $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$, $-2i$



$d = -2, d$

4. א. (1) כל X , (2) $x \rightarrow \infty : y = 1$, $x \rightarrow -\infty : y = -1$, (3) עלייה: כל X , ירידה: אין

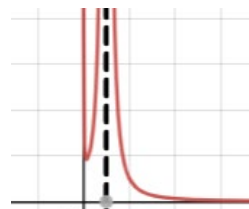


ב. (4) הוכחה, ג. (1) 0.761, (2) 0.106

5. א. (1) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ אי זוגי: עלייה: $x > \frac{1}{e^n}$, ירידה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$

עבור m זוגי: עלייה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$ או $x > 1$, ירידה: $\frac{1}{e^n} < x < 1$ (3) עבור m אי זוגי:

$(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n})$ מינימום, עבור m זוגי: $(1, 0)$ מינימום, $(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n})$ מקסימום



ד. 0.5

ב. גרף א': $n=3$, גרף ב': $n=1$, גרף ג': $n=2$

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

1. לפניך משוואת הפרבולה: $y^2 = 2ax$ ומשוואת המעגל: $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$. הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.

ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

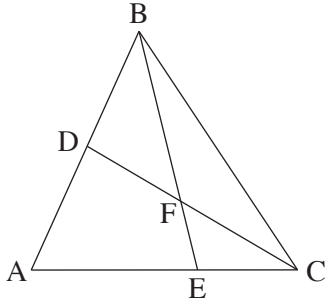
ג. (1) הבע באמצעות a את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

(2) מצא את a .

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב-2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש שווה למרחק שלהן

מן הישר $x = -4$.



2. נתון משולש ABC (ראה סרטוט).

הנקודה D היא אמצע הצלע AB.

הנקודה E מחלקת את הצלע AC ביחס של $AE : EC = 2 : 1$.

הנקודה F היא מפגש הקטעים BE ו-CD.

נסמן: $\vec{CA} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$

k ו- t הם מספרים כך ש: $\vec{CF} = k \cdot \vec{CD}$, $\vec{BF} = t \cdot \vec{BE}$

א. מצא את t ואת k.

המשולש ABC נמצא במישור $4x + 2y + z - 12 = 0$.

מישור זה חותך את ציר ה- x בנקודה A, את ציר ה- y בנקודה C

ואת ציר ה- z בנקודה B. הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו- F.

ג. מצא את משוואת המישור AOE.

ד. מצא את נפח הפירמידה FAOE.

3. נתונה משוואה I: $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II: $(a \cdot z^2 + b)(z + 1) = 0$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים השונים מאפס.

ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי $a \cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו- b, אם יש צורך.

ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים

והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I.

ה. מצא את היחס $\frac{b}{a}$.

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{(bx^2 - 2bx)} - 1$ המוגדרת לכל x . $b < 0$ הוא פרמטר. הבע את תשובותיך באמצעות b , אם יש צורך.

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x (אם יש כאלה).
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נגדיר את הפונקציה: $g(x) = f(x + a)$, a הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר ה- y .

- ב. (1) מצא את a , ובטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x ו- b .
- (2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. מצא את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, וקבע את סוגן.
- ד. הצב $b = -0.5$, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'(x)$ ומאונכים לציר ה- x .

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot x^2 - x^3$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר. ענה על סעיפים א-ג עבור $0 < a$. הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.
- א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.
- ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x .
(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
(2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.
ענה על סעיף ד עבור $a = 0$.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. ציין בגרף את הערכים המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

בהצלחה!

5 יחידות - שאלון 35582 - פתרון - מועד ב' - קיץ תשפ"א - 8.7.2021

1. א. $y = \sqrt{ax}$. ב. $(0,0), (2,2\sqrt{a}), (2, -2\sqrt{a})$.

ג. (1) מרכז המעגל: $(a+1, 0)$ והרדיוס הינו $(a+1)$. (2) $a = 4$.

ד. $y^2 = 18x$.

2. א. $k = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{4}$. ב. $E(1,4,0), F(\frac{3}{4}, 3, 3)$.

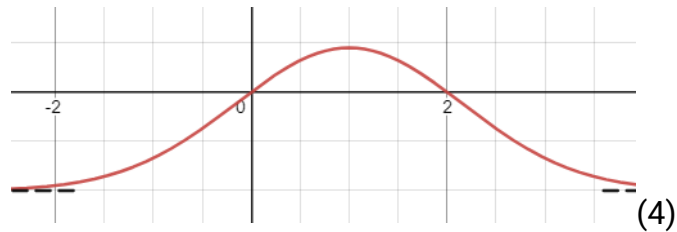
ג. $V = 6$. ד. $z = 0$.

3. א. $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

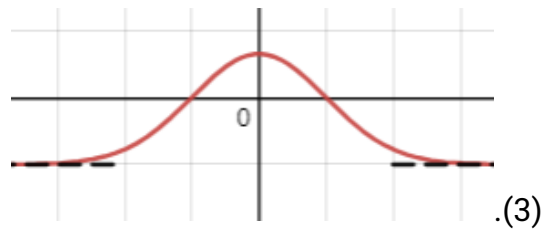
ב. $\frac{b}{a} = 8$. ה. $z = -\sqrt{\frac{b}{a}}i, z = \sqrt{\frac{b}{a}}i, z = -1$. ג. הוכחה. ד. $s = 2\sqrt{3}$.

4. א. (1) $(0,0)$, (2) $(2,0)$. אס' אנכית: אין, אס' אופקית: $y = -1$.

(3) נקודת מקסימום ב $(1, e^{-b} - 1)$.



ב. (1) $a = 1$. (2) הפונקציה $g(x)$ זוגית.

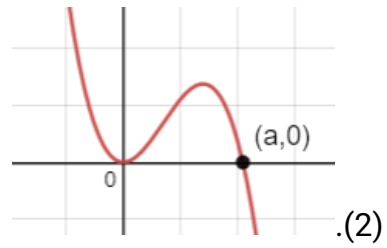


ג. נקודת מינימום כש $x = \sqrt{-\frac{1}{2b}}$, נקודת מקסימום כש $x = -\sqrt{-\frac{1}{2b}}$.

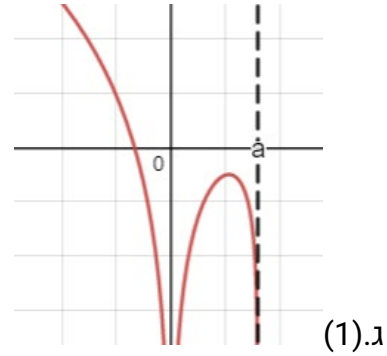
ד. $s = 2(\sqrt{e} - 1) = 1.297$.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ביח"ל**
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

5. א.(1). תחום חיוביות: $0 < x < a$ או $x < 0$, תחום שליליות: $a < x$



ב.(1) $x < a, x \neq 0$ (2) $x = a, x = 0$ (3). נקודת מקסימום ב $(\frac{2a}{3}, \ln(\frac{4}{27}a^3))$



(2). $0 < a < 1.889$

