

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ב 5 יח"ל**
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

פונקציות אי רציונליות (פוקציית שורש)

נגזרת ומשוואת משיק לפונקציה

דוגמה	נוסחה	סוג
$(3\sqrt{x})' = \frac{3}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	נגזרת פונקציה אי רציונלית
$(3\sqrt{2x-5})' = \frac{3 \cdot 2}{2\sqrt{2x-5}}$	$(a\sqrt{f(x)})' = \frac{a \cdot f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	נג' פונ' אי רציונלית מורכבת
$(x\sqrt{2x+1})' = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	נגזרת מכפלה

1. גזרו את הפונקציות הבאות

- א. $y = 4\sqrt{x} - x$ ב. $y = \sqrt{x} - 0.5x$ ג. $y = x - 2\sqrt{x}$
- ד. $y = -\sqrt{x} - x$ ה. $y = -8\sqrt{x} + 2x$ ו. $y = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}$
- ז. $y = \sqrt{x^2 - x - 1}$ ח. $y = \sqrt{-3x^2 - 1}$ ט. $y = \sqrt{2x^2 - 5x}$
- י. $y = x\sqrt{x} - x$ יא. $y = x\sqrt{x-1}$ יב. $y = x^2\sqrt{x^2-1}$

2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - a\sqrt{x}$
 ידוע שהפונקציה עוברת בנקודה (4,8).
 מצאו את הפרמטר a. תשובה 4

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

3. נתונה הפונקציה $f(x) = 3m\sqrt{x} - 3x$

ידוע, שיש נקודת קיצון לפונקציה בנקודה שבה $X=1$
מצא את הפרמטר m . תשובה 2

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} - bx$

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $(9,-3)$.
מצאו את הפרמטר b . תשובה 1

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax} - 3$

נתון שלפונקציה $f(x)$ עוברת בנקודה $(2,1)$.
מצאו את הפרמטר a

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{a}$

בנוסף נתון, שהפונקציה עוברת דרך הנקודה $(18,-81)$.
מצאו את הפרמטר a

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} - ax$

ידוע ששיפוע המשיק לפונקציה בנקודה, שבה $X=4$ הוא 0
מצאו את הפרמטר a . תשובה 3

8. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2\sqrt{-3x^2 + a}$ פרמטר a

ידוע כי $x=2$ היא נקודת קיצון.

א. מצאו את הפרמטר a

ב. מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה $(1,3)$

ג. מצאו את משוואת המישק לפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y

תזכורת:
נגזרת של מכפלה
 $(x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב5 יח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

9. נתונה הפונקציה: $y = (x - b)\sqrt{2x}$, פרמטר b .

ידוע כי $x=1$ היא נקודת קיצון.

א. מצאו את הפרמטר b

ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודת הקיצון שלה

10. נתונה הפונקציה $y = x - b\sqrt{x} + k$ ו- k הם פרמטרים

נתון שיש לפונקציה נקודת קיצון בנקודה $(4, -1)$

א. מצאו את הפרמטרים b ו- k

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר $y=b$

11. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{-x^2 + ax}$ פרמטר a .

המשיק לפונקציה בנקודה $x=3$ מקביל לציר x -

א. מצאו את הפרמטר a

ב. רשמו 4 נקודות שנמצאות על הפונקציה

תשובה: $a = 1$

12. נתונה הפונקציה $f(x) = -4\sqrt{x} + b + x$

נתון שהפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שנמצאת 4 יחידות מעל ראשית הצירים.

מצאו את הפרמטר b

13. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{A} - \sqrt{x}$

נתון ששיפוע המשיק בנקודה שבה $x=1$ הוא 3.

מצאו את הפרמטר A

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

14. נתונות הפונקציות הבאות: $y = \frac{\sqrt{x}}{1-a} - x$

נתון ששיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=4$ הוא $-\frac{1}{2}$

מצאו את הפרמטר a תשובה: $\frac{1}{2}$

15. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{1+2ax - ax^2}$

לפונקציה נקודת קיצון עבור $x = \frac{1}{2}$

מצאו את הערך של $f'(4)$

16. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - a\sqrt{x}$

ידוע שהפונקציה עוברת בנקודה $(4,8)$.

מצאו את הפרמטר a .

תשובה: א. 4

17. נתונה הפונקציה $f(x) = ax - 2\sqrt{x} - 3$, פרמטר a

לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = \frac{1}{4}$

א. מצאו את הפרמטר a

ב. האם הפונקציה עוברת בנקודה $(4,-5)$? נמקו

18. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} - ax$

ידוע ששיפוע המשיק לפונקציה בנקודה, שבה $x=4$ הוא 0

מצאו את הפרמטר a .

תשובה: א. 3

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

חקירת פונקציה אי רציונאלית

19. חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה
- מצאו את האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לצירים
- מצאו את נקודות הקיצון של וקבעו את סוגה
- מצאו את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים
- שרטטו את הפונקציה במערכת צירים

א. $y = 4\sqrt{x} - x$ ב. $y = \sqrt{x} - 0.5x$ ג. $y = x - 2\sqrt{x}$

ד. $y = -\sqrt{x} - x$ ה. $y = -8\sqrt{x} + 2x$ ו. $y = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

ז. $y = x\sqrt{x} - x$ ח. $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$ ט. $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$

20. חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים משאלה קודמת

א. $y = \sqrt{x^2 - x}$ ב. $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ ג. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

ד. $y = -x + \sqrt{x - 1}$ ה. $y = \sqrt{2 - x} + 2x$ ו. $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$

ז. $y = x - \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ ח. $f(x) = x - 2\sqrt{x} - 3$ ט. $y = \sqrt{x^3 - 9x}$

י. יא. יב.

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

21. חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים משאלה קודמת

י.ד. $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{-x} + 2$

י.ג. $f(x) = \sqrt{8-x^2} + x$

י.ז. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$

י.ט. $f(x) = -2\sqrt{-x+9} - \sqrt{x} + 3$

22. חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים

ב. $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$

א. $f(x) = x^2\sqrt{x} - 2.5x$

ד. $f(x) = -x - \sqrt{2-x^2}$

ג. $f(x) = -x^2\sqrt{x+5}$

ו. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

ה. $f(x) = \sqrt{(4-x^2)(x^2-1)}$

ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} + 2$

ז. $f(x) = x^2\sqrt{x-1}$

23. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} - 3$.

א. מהו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

1. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

2. האם יש לפונקציה נקודות קיצון, אם כן מה הן?

3. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. שרטטו את במערכת צירים קרטזית את הפונקציה הנ"ל.

ג. רשמו 3 נקודות על הפונקציה שאינן נקודות חיתוך עם הצירים

תשובה: א. $x \geq 0$ ב. $(0,0), (9,0)$ ג. אין ד. עלייה: $x \geq 0$ ה.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

24. נתונה הפונקציה: $f(x) = -4\sqrt{x} + x$

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(2) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה. נמק.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק את תשובתך.

ב. קבע איזה מן הגרפים I-IV שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$.

א. $x \geq 0$ ב. $(0,0)$ ג. $\min(4,-4)$ ד. ירידה $0 \leq x < 4$ עלייה $x > 4$ ה. גרף 3

26. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt{x}$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת הקיצון, וקבעו את סוגה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ד. האם הפונקציה עולה או יורדת, בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

תשובה: א. $x \geq 0$ ב. $(2.25, -0.75)$ ג. $(0,0)$, $(9,0)$ ד. עולה

27. נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ד. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודת הקיצון

תשובה: א. $x \geq 0$ ב. עלייה: $0 < x < 1$ ירידה: $x > 1$ ג. $(0,0)$, $(4,0)$ ד. $y=2$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

28. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - a\sqrt{x}$

ידוע שהפונקציה עוברת בנקודה (4,8).

- א. מצאו את הפרמטר a.
- ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצאו את הנקודה בה מתאפסת הנגזרת וקבע את סוגה.
- ד. שרטטו את הפונקציה במערכת צירים.
- ה. מצאו עבור אלו ערכי k חותך הישר $y = k$ את הפונקציה פעמים.

תשובה: א. 4, ב. $x \geq 0$, ג. $\min(1, -3)$ ה. $-3 < K < 0$

29. נתונות הפונקציות הבאות: $y = \frac{\sqrt{x}}{1-a} - x$

נתון ששיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=4$ הוא $-\frac{1}{2}$

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את הפרמטר a.
- ג. מצאו את נקודה הקיצון המקומית של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

תשובה: א. $\frac{1}{2}$, ב. $x \geq 0$, ג. $\min(1, 1)$, ד. (0,0), (4,0)

30. נתונה הפונקציה $f(x) = 3m\sqrt{x} - 3x$

ידוע, שיש נקודת קיצון לפונקציה בנקודה שבה $x=1$

- א. מצא את הפרמטר m.
- הציבו את m. וענו על הסעיפים הבאים
- ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ה. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה, שבה $x=1$

תשובה: א. $m = 2$, ב. $x \geq 0$, ג. (0,0), (4,0), ד. $\max(1, 3)$ ה. $y = -2x - 9$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

31. נתונה הפונקציה $f(x) = x - 2\sqrt{x} - 3$

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - (2) מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 - (3) מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים
 - (4) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. קבעו עבור אילו ערכי x הפונקציה חיובית

תשובה: א. $x \geq 0$ ב. $(0, -3)$ ג. $(9, 0)$ ד. $\min(1, -4)$ ה. בסוף הספר ו. $x > 9$

32. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} - ax$

ידוע ששיפוע המשיק לפונקציה בנקודה, שבה $X=4$ הוא 0

א. מצאו את הפרמטר a .

הציבו $a=3$ וענו על הסעיפים הבאים

- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה .
 - (2) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - (3) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ג. שרטטו את הפונקציה במערכת צירים קרטזית
- ד. לאילו ערכי x הפונקציה הנתונה שלילית?

תשובה: א. 3, ב. $x \geq 0$ ג. $(0, 0)$, $(9, 0)$ ד. $\max(4, -4)$ ה. בסוף הספר ו. $0 < x < 9$

33. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה .
- ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.
- ג. מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מהי אסימפטוטה המקבילה לציר ה- y ?
- ה. שרטטו את הפונקציה במערכת צירים.

תזכורת:
נגזרת של מכפלה
 $(x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

תשובה: א. $x > 0$, ב. $\min(4,3)$ ג. ירידה: $0 < x < 4$, עלייה: $x > 4$ ד. ה. בסוף הספר

34. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2\sqrt{x} - 2.5x$

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- האם הפונקציה חותכת את ציר ה-x?
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה: א. $x \geq 0$ ב. $\min(1, -1.5)$ ג. כן ד. בסוף הספר

35. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} + 2$

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם לפונקציה יש נקודות קיצון? נמק.
- מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטה המקבילה לציר ה-x.
- מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה, שבה שיעור ה-X הוא 1.

תשובה: א. $x > 0$, ב. לא ג. יורדת לכל x ד. $x = 0$ ה.

36. נתונות הפונקציות הבאות: $y = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - 2$

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה הבאה?
- הראו שהפונקציה יורדת לכל תחום הגדרה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטטו את גרף הפונקציה

שאלה 4: א. $x > 0$, ב. ג. $(0.25, 0)$ ד. $y = -2, X = 0$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

37. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2}{4} - 8\sqrt{x}$

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ג. שרטטו את גרף הפונקציה
- ד. לאילו ערכים של k חותך הישר $y = k$ בשתי נקודות?

פתרון א. $x \geq 0$ ב. $(4, -12)$ ג. ד. $-12 < k \leq 0$

38. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-6}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ של הפונקציה וקבעו את סוגה
- ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$
- ה. שרטטו את הפונקציה $f(x)$

פתרון א. $x \leq 6$ ב. $(8, \sqrt{8})$ ג. אין, ד. ירידה: $6 < x < 8$, עלייה: $x < 8$ ה.

39. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$:

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הישר $y = -2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

א. $x < 1$, $x > 4$. (2) $(0, \sqrt{4})$, $(1, 0)$, $(4, 0)$. (3) עולה $x > 4$ יורדת $x < 1$. (4) ב. לא

40. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^3 - 12x}$:

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

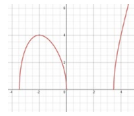
ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. האם הישר העובר בנקודה על הפונקציה ששיעור ה-x שלה הוא 4 ומאונך לציר ה-y חותכת את

הפונקציה בעוד נקודה? נמקו

א. $x > \sqrt{12}$, $x < 0$, $x < -\sqrt{12}$. ב. עלייה $x > \sqrt{12}$, $-\sqrt{12} < x < -2$, ירידה $0 < x < 2$. ג. חיובית: כל x שתואם



את תחום ההגדרה, שלילית: אין. ה. כן

41. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{bx} - 6x$, פרמטר b

נתון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר ה-x בנקודה בה $x=4$

א. מצאו את הפרמטר b

הציבו $b=4$ וענו על הסעיפים

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

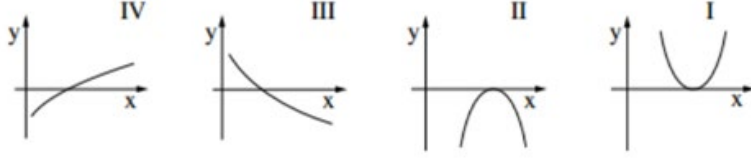
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. איזה גרף מבין הגרפים I, II, III, IV, עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$

בתחום $1 \leq x \leq 10$? נמק.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמונות 5 יח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד



פתרון: א. 4, ב. (1) $x \geq 0$, (2) $(0,0)$, $(9,0)$, (3) $(0,0)$ מקס, $(4,-8)$ מינימום (4). ג. IV

42. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{12 - 3x}$, $g(x) = -\sqrt{12 - 3x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מהפונקציות (אם יש כאלה).

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות עם הצירים.

ד. במערכת צירים אחת סרטט בקו מלא סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט בקו מרוסק סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

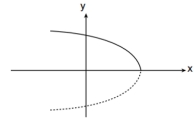
ה. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$,

והעבירו ישר אחר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

(1) מצא את השיעורים של נקודת המפגש בין המשיקים.

(2) מצא את שטח המשולש המוגבל על ידי המשיקים ועל ידי הישר $x = 1$.

פתרון: א. ת"ה: $x \leq 4$ ב. $f(x)$ עלייה: אין, ירידה: $x < 4$, $g(x)$ עלייה: $x < 4$, ירידה: אין ג. $f(x)$ $(4,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $g(x)$ $(4,0)$, $(-\sqrt{12},0)$



ד. $(4,0)$, $(-\sqrt{12},0)$


לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות 5 יח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

43. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2\sqrt{x+5}$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- (3) האם יש ערכים של x שעבורם $f(x) = 20$? נמק.
- (4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של גרף הפונקציה, וקבע את סוגן.
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.


ב. כמה פתרונות יש למשוואה $-14 = -x^2\sqrt{x+5}$? נמק.

פתרון: א. $x \geq -5$. ב. $(-5, 0)$, ג. $(0, 0)$. ד. אין ד. $\max(0, 0)$, $\min(-4, -16)$, $\max(-5, 0)$. ה.  3. 1

44. נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{2-x^2}$, a הוא פרמטר.

הישר $y = -x - \sqrt{2}$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של a .
- הצב את הערך של a שמצאת וענה על סעיפים ב-ד
- ב. 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.
3. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה. וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. דרך נקודת המינימום המוחלט ודרך נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה העבירו מקבילים לציר ה- Y . מצא את המרחק בין שני המקבילים.

פתרון: א. $a = -1$. ב. 1. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 2. $X = 1$. 3. $\min(1, -2)$, $\max(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. ד.  2.41. 2. $\gamma = 1$ גרף IV

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

45. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{a-x^2} + x$

הפונקציה מוגדרת בתחום: $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$

- א. מצאו את הפרמטר a אם ידוע שהוא חיובי
- הצב את הערך של a שמצאת וענה על סעיפים ב-ד
- ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה
- ג. מצאו את נקודת החיתוך עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

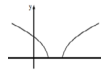


פתרון: א. 8 ב. (2,4) מקסימום ג. (-2,0) ד. $y=1$, $y=-1$, ד. 1. 2. לא ד.

46. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 + bx + 5}$, b הוא פרמטר.

נתון כי שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$ הוא $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

- א. מצא את הערך של b
- הצב $b=-6$ וענה על סעיפים ב-ה.
- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- (3) רשמו את הנקודות הכי נמוכות על גרף הפונקציה $f(x)$
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקצית הנגזרת $f'(x)$
- (2) סרטטו סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$



פתרון: א. $b=-6$ ב. $x \geq 5$ או $x \leq 1$ ג. $(-\infty, \max\sqrt{5})$, (0, 1), (5, 0) ד. עלייה $x > 5$, ירידה $x < 1$ ה.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

47. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax^2 - x - 6}$, a הוא פרמטר.

נתון כי שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2.5$ הוא $\frac{9}{4}$

א. מצא את הערך של a

הציבו $a=2$ וענה על סעיפים ב' - ד'.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

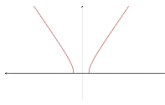
(3) מצאו את תחומי העליה והירידה של הפונקציה הנגזרת.

(4) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=-2$

נתונה פונקציה נוספת: $g(x) = f(x) - 2$

ד. מצאו את תחומי השליליות של הפונקציה $g(x)$



פתרון: א. $a=2$. ב. (1) $x > 2$ או $x < -1.5$, ב. (2) $(2,0)$, $(-1.5,0)$ ב. (3) יורדת $x > 2$, עולה $x < -1.5$, ב. (2)

ג. $y = -2.25x - 2.5$, ד. שלילית: $x - 2 < x < -1.5$, $2 < x < 2.5$

48. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{-x} + 2$,

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

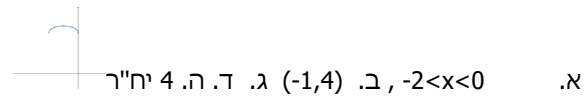
ד. בנו דלתון ש-3 מקודקודיו הם נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה וקודקוד הרביעי, הנמצא

על ציר ה- x , יודע שהאלכסון הראשי עובר בנקודת המקסימום של פונקציה ודרך הקודקוד

שנמצא על ציר. מצאו את שטח הדלתון הנ"ל

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

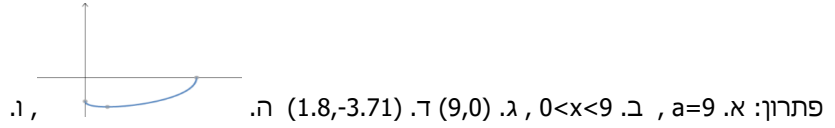
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד



49. נתונה הפונקציה $f(x) = -2\sqrt{-x+a} - \sqrt{x} + 3$

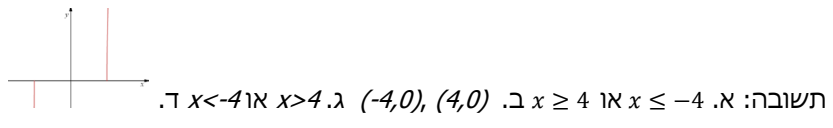
ערך הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-y הוא -3

- א. מצא את הערך של a
- הצב $a=9$ וענה על סעיפים ב-ד.
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
- ד. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה
- ו. שרטטו את גרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$



א. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x\sqrt{x^2 - 16}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x
- ג. הוכיחו שהפונקציה עולה בכל תחום הגדרה
- ד. שרטטו את הפונקציה במערכת צירים דו ממדית



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

פונקציה אי רציונאלית ומנה

50. רשמו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות וגזרו את הפונקציות הבאות

א. $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ב. $y = \frac{\sqrt{2x}}{x^2+3}$ ג. $y = \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}$

ד. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ה. $y = \frac{\sqrt{x^2+10x+9}}{x^2-9}$ ו. $y = \frac{-x^2-1}{\sqrt{4x^2-1}}$

51. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x+b}} - 1$ שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה $x=3$ הוא -1.5 . הישר

$x=2$ הוא אסימפוטת לגרף הפונקציה

- א. מצאו את הפרמטרים a ו-b
- ב. האם יש אסימפוטת אופקית לפונקציה? נמקו
- ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה ששיפוע הפונקציה הוא -1.5

52. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-b}}$ נתון שלפונקציה נקודת קיצון ב- $x=64$

- א. מצאו את הפרמטר b
- ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

53. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ נתון שתחום הגדרה של הפונקציה הוא $x > 9$

- א. מצאו את הפרמטר k
- ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה ששיעור ה-x הוא 10

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

חקירת פונקציה אי רציונלית ומנה

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \text{ נתונה הפונקציה:}$$

- א. תחום הגדרה:** בפונקציה הנתונה יש שני דברים צריכים למצוא את הנקודות שמאפסות את המכנה ובנוסף למצוא את כל הערכים של x שבהן הביטוי בשורש מקבל ערכים אי שלילים.
- **תחילה** נמצא את הנקודות שבהן **המכנה של הפונקציה מתאפס** (שווה אפס) ולכן ננסה למצוא את נקודות אלה ע"י השוואת המכנה לאפס: $x^2 = 0$ פתרון של המשוואה הוא: $x=0$ ולכן נוכל לומר שהפונקציה מוגדרת בתחום: $x \neq 0$.
 - כעת נבדוק את עבור אילו הערכים מקבל הביטוי מתחת לשורש הערכים אי שלילים לכן נצטרך לפתור את האילו שיויון הבא: $x^2 - 9 \geq 0$ הפתרון הוא: $x \leq -3$ או $x \geq 3$

לכן התחום הגדרה לאחר שילוב של שתי התוצאות הוא הסופי הוא :

$$x \geq 3 \text{ או } x \leq -3$$

(כבר מוכל בתוך התחום) $x \neq 0$

ב. אסימפטוטות המקבילות לצירים:

אסימפטוטה אנכית (אסימפטוטה המקבילה לציר ה- y): ניתן לזהות לפי תחום ההגדרה (בשאלון 804) ולכן ניתן להגיד שיש אסימפטוטות אנכית ב- $x=0$, אך בתרגיל זה $x=0$ הוא לא אסימפטוטה כי הפונקציה לא מתקרבת עליו.

*הפונקציות בשאלון 804 אינו מכיל נקודות אי רציפות סינגולריות ולכן ניתן לפי הנקודות שמאפסות את המכנה.

אסימפטוטה אופקית (המקבילה לציר ה- x):

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} \right) = 0 \text{ (ראו פתרון לפי גבולות בעמוד):}$$

ניתן להגיד שכאשר החזקה הגבוהה ביותר במכנה גדול מהחזקה הכי גדולה במונה הפונקציה תקבל אסימפטוטה ב- $y = 0$

$$y = 0$$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח 7"

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

ג. נקודות קיצון (נקודות בן שיפוע המשיק לפונקציה שווה לאפס, ושיש שינוי במגמת שינוי בנקודה). לכן נגזור את הפונקציה תחילה

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} \cdot x^2 - 2x \cdot \sqrt{x^2-9}}{(x^2)^2} =$$

לאחר מכנה משותף במונה נקבל:

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 4x(x^2 - 9)}{(x^2)^2} = \frac{36x - 2x^3}{2\sqrt{x^2-9} \cdot x^4} = \frac{36x - 2x^3}{2x^4\sqrt{9-x^2}} =$$

נקבל שהנגזרת הסופית היא:

$$f'(x) = \frac{18 - x^2}{x^3\sqrt{9-x^2}}$$

כעת נשווה ל-0

$$0 = 18 - x^2$$

*ניתן להשוות רק את המונה של הפונקציה. פתרונות המשוואה הם:

$$x = \sqrt{18}, x = -\sqrt{18}$$

כעת נבדוק את ערך הנגזרת של הפונקציה סביב הנקודות שקיבלנו.

		$x=-\sqrt{18}$		$x=-3$		$x=3$		$x=\sqrt{18}$	
$f(x)$	\rightarrow	max	\rightarrow	-----		\rightarrow		max	\rightarrow
$f'(x)$		0		-----				0	

לאחר מציאת ערך ה-y בעזרת הפונקציה נוכל לקבוע שנקודות הקיצון הן:

$$\max(-\sqrt{18}, 1/6) \quad \max(\sqrt{18}, 1/6)$$

ד. תחומי עלייה וירידה ניתן לראות מהטבלה:

עלייה:

$$x < -\sqrt{18}, 3 \leq x < \sqrt{18}$$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

ירידה:

$$x < \sqrt{18}, -\sqrt{8} < x \leq -3$$

ה. נקודות חיתוך עם צירים:

עם ציר ה-x, $y=0$: לכן: $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} = 0$ נוכל להשוות רק את המונה לאפס ונקבל:

$$x=3, x=-3$$

ולכן:

עם ציר ה-y, $x=0$ לא נמצא בתחום ההגדרה ולכן אין נקודות חיתוך

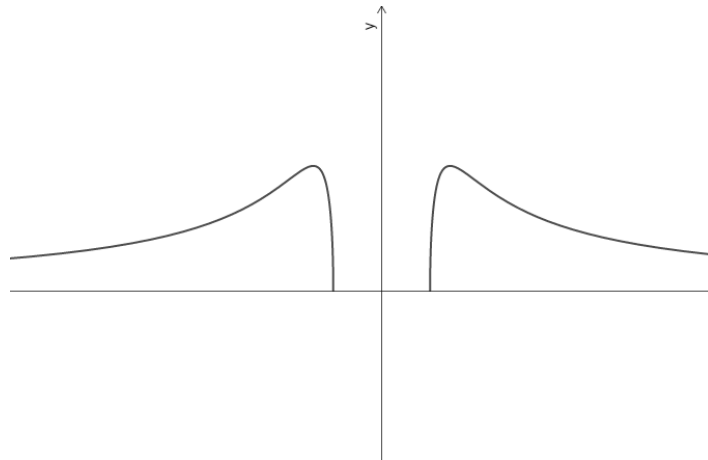
סיכום:

חיתוך עם הצירים: $(3, 0)$, $(-3, 0)$,

קיצון: $\max(-\sqrt{18}, 1/6)$, $\max(\sqrt{18}, 1/6)$

תחום הגדרה: $x \leq -3$ או $x \geq 3$ אסימפטוטות: $y=0$

ו. כעת נשרטט את הפונקציה: תחילה נסמן את האסימפטוטות של הפונקציה



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

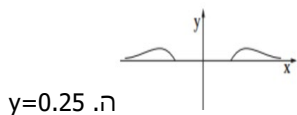
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

54. חקרו את הפונקציות הבאות

- א. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x}$.א
 ב. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-2}}$.ב
 ג. $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x}$.ג
- ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$.ד
 ה. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}$.ה
 ו. $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x}$.ו
- ז. $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x-1}}$.ז
 ח. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$.ח
 ט. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$.ט
- י. $f(x) = \frac{x+3}{2\sqrt{x}}$.י
 יא. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$.יא
 יב. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + 2$.יב
- יג. $f(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{x-1}}$.יג
 יד. $f(x) = \frac{6x}{3-\sqrt{x}} + 2$.יד
 טו. $f(x) = \frac{-\sqrt{x-1}}{x^2+4}$.טו

55. נתונה הפונקציה - $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 ג. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 (2) היעזר בגרף שסרטטת, ומצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.



פתרון: א. $x \leq -2$ או $x \geq 2$.ב. $(-2,0)$, $(2,0)$.ג. $\max(\sqrt{8}, 0.25)$, $\min(-\sqrt{8}, 0.25)$.ד. $y=0.25$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

56. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(4) מצאו את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

a. האם הישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=5$ עובר בראשית הצירים?

נתונה פונקציה נוספת: $g(x) = f(x) - 2$

b. האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x

א. $x > 2$, $x < 2$ ב. (1) $(2, 0)$, $(-2, 0)$, (2) $y=1$, $y=-1$ (3) עולה בכל תחום ההגדרה, (4) ג. לא, ד. לא

57. נתונה הפונקציה - $f(x) = \frac{3x+3a}{\sqrt{x-1}}$, a הוא פרמטר

נתון שיש נקודת קיצון לפונקציה $x=3$

א. (1) מצאו את הפרמטר a

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. מצאו את האסימפטוטה של הפונקציה.

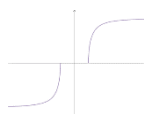
iii. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

iv. שרטטו את הפונקציה

נתונה הפונקציה $g(x)=f'(x)$

ב. מהי נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה-x?

ג. שרטטו את הגרף של $g(x)$.



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל

"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

פתרון: א. $a=1$, ב. $x > 1$, ג. $x=1$, ד. $(3, 8.5)$ ה. $(3, 0)$ ו. $(3, 0)$ ז. $(3, 0)$

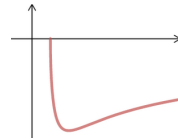
58. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{5\sqrt{k+x}}{x}$, K הוא פרמטר

נתון שהפונקציה עוברת בנקודה $(5, 4)$

א. מצאו את הפרמטר k

הציבו $k=0$ וענו על הסעיפים הבאים

- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציה.
- (2) מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- x ?
- (3) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- (4) שרטטו את הפונקציה
- ג. מצא עבור אילו ערכי k להישר $y=k$ יש שתי נקודות חיתוך עם הפונקציה.



פתרון: א. $k=-1$, ב. $x \geq 1$, ג. $y=0$, ד. $(2, -5)$ ה.