

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## תוכן עניינים

- תחום הגדרה ואסימפטוטה אנכית
- נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה
- אסימפטוטה אופקית
- נקודות אי רציפות
- נקודות פיתול
- שרטוט
- תרגילי סיכום

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח 5 יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## הפונקציה הרציונאלית

### תחום הגדרה ואסימפטוטה אנכית

נתון בביטוי:  $\frac{1}{x}$

ונשאל איזה ערכים של  $x$  נוכל להציב בו (קבוצת ההצבה).

מיד ניתן להבחין שלא ניתן להציב  $x = 0$  מכיוון שהביטוי  $\frac{1}{0}$  אינו מוגדר.

לכן נוכל לומר שתחום ההצבה של הביטוי הוא  $x \neq 0$

### תחום הגדרה של פונקציה רציונלית

אילו ערכי  $x$  ניתן להציב בפונקציה על מנת שלא נקבל אפס במכנה

#### דוגמאות

$f(x) = \frac{x}{2x - 1}$ <p>תחום הגדרה <math>x \neq \frac{1}{2}</math></p>	$f(x) = \frac{3}{x + 3}$ <p>תחום הגדרה <math>x \neq -3</math></p>	$f(x) = \frac{1}{x - 1}$ <p>תחום הגדרה <math>x \neq 1</math></p>
$f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$ <p>תחום הגדרה <math>x \neq 4, -4</math></p>	$f(x) = \frac{3x}{x(x - 3)}$ <p>תחום הגדרה <math>x \neq 0, 3</math></p>	$f(x) = \frac{x^2 - 6x}{(x - 2)(x + 4)}$ <p>תחום הגדרה <math>x \neq 2, -4</math></p>

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## תחום הגדרה ואסימפטוטה אנכית - תרגול

1. נתונה הביטוי  $\frac{1}{x-2}$

ניר טען שלא ניתן להציב  $x=2$  ולירון טענה שלא ניתן להציב  $x=0$   
מי צודק

- i. ניר | ii. לירון | iii. שניהם

2. נתון הביטוי  $\frac{1}{x(x-3)}$

מורן טען שלא ניתן להציב  $x=3$  וליאור טענה שלא ניתן להציב  $x=0$   
מי צודק

- i. מורן | ii. ליאור | iii. שניהם

3. קבעו מה תחום ההצבה בכל ביטוי.

א.  $\frac{1}{x}$  | ב.  $\frac{1}{x(x+4)}$  | ג.  $\frac{1}{(2x+1)}$

4. נתון הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

נתון בכל סעיף ערך של  $x$ , קבעו האם ניתן להציב אותו בפונקציה הנתונה או לא

- א.  $x = 4$  | ב.  $x = 0$  | ג.  $x = 1$  | ד.  $x = -1$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

$$5. \text{ נתון הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x^2(3x-1)(2x+1)}$$

נתון בכל סעיף ערך של  $x$ , קבעו האם ניתן להציב אותו בפונקציה הנתונה או לא

א.  $x = \frac{1}{2}$       ב.  $x = \frac{1}{3}$       ג.  $x = 0$       ד.  $x = -\frac{1}{3}$

6. בכל אחד מהסעיפים מצאו את תחום ההגדרה

א.  $f(x) = \frac{x}{x-6}$       ב.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$       ג.  $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2}$

ד.  $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-x}$       ה.  $f(x) = \frac{2x+4}{x^2-6x-7}$       ו.  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x^2-7x-4}$

ז.  $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-1}$       ח.  $f(x) = \frac{-x}{x^2-x-2}$       ט.  $f(x) = \frac{12-x^2}{x^2-3x}$

7. בכל אחד מהסעיפים מצאו את תחום ההגדרה

א.  $f(x) = \frac{3x-9}{x^2-6x+10}$       ב.  $f(x) = \frac{2x}{x^2+2x+1}$       ג.  $f(x) = \frac{x-2}{4x-x^2-5}$

ד.  $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{6-x}$       ה.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$       ו.  $f(x) = \frac{-2x^2}{x^3-5x^2-14x}$

ז.  $f(x) = \frac{4+2x}{x^2}$       ח.  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{(x^2+1)(x-4)}$       ט.  $f(x) = \frac{4-x}{x^4-1}$

13. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{bx + 8}$ , פרמטר b

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא  $x > 4$  או  $x < 4$

מצאו את הפרמטר b

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 + ax - 8}$ , פרמטר a

נתון שהפונקציה אינה מוגדרת עבור  $x = -2$

מצאו את הפרמטר a.

ג. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x^2 - mx + n}$ , m ו-n פרמטרים

נתון ש-f(x) מוגדרת עבור  $x < 1$  או  $x > 4$  או  $1 < x < 4$

מצאו את הפרמטרים m ו-n

ד. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{a^4x^2 - a^2x - 2}$ , m ו-n פרמטרים

נתון שהפונקציה אינה מוגדרת עבור  $x = 2$

מצאו את ערכו של a

"אני תמיד עושה את מה שאני לא יודע לעשות כדי שאני אלמד לעשות אותו" - פאבלו פיקאסו

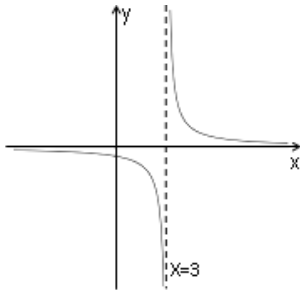
לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ב"ח 5"**  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

### אסימפטוטה אנכית (מקבילה לציר ה-y)

אסימפטוטה אנכית (קרא: a-simp-TO-ta) היא קו ישר אינסופי, שהפונקציה מתקרבת אליו יותר ויותר, אך לא תיגע או תחתוך אותו.

לפונקציה אסימפטוטה בנקודה/ות בהן היא אינה מוגדרת (פונקציות רציונליות - x במכנה), כלומר בנקודות אלה הפונקציה לא יכולה לקבל ערכים של x מסוימים (אך לא תמיד) ולכן סביב נקודה זו הפונקציה מתבדרת לאינסוף, זאת אומרת עולה או יורדת בצורה קיצונית.

### לדוגמה:



באזור ניתן לראות את הגרף של הפונקציה  $y = \frac{1}{x-3}$

ניתן להבחין כי במקרה ש-  $x = 3$ , המכנה מתאפס והפונקציה ולכן הפונקציה אינה מוגדרת לכן סביב הישר  $x=3$  הפונקציה שואפת לאינסוף (או מינוס אינסוף).  
 נוכל לומר שיש לפונקציה זו אסימפטוטה אנכית בנקודה  $x=3$

### דוגמאות נוספות

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

תחום ההגדרה הוא  $x \neq 2, -2$

לכן יש לפונקציה, 2 אסימפטוטות האנכיות

$$x = -2 \text{ ו- } x = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{4x + 10}$$

תחום ההגדרה הוא  $x \neq -2.5$

ולכן אסימפטוטה האנכית תהייה ב-

$$x = -2.5$$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## אסימפטוטות אנכית - תרגול

8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$

א. הציבו את ערכי ה-x הבאים בפונקציה ורשמו את התוצאות המתקבלות בטבלה

x	-5	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5	5
f(x)									

ב. מן הטבלה קבעו איזה מסקנות נכונות

- (1) שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא  $x \neq 0$
- (2) ש"סביב" הנקודה שבה  $x = 0$  הפונקציה מקבלת ערכים גדולים
- (3) שיש לפונקציה אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0$
- (4) כל הטענות 1-3 נכונות

9. נתון הפונקציה  $g(x) = \frac{-x}{(x+6)(x-1)}$

קבעו איזה מהאגדים הבא נכון

- א. לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = 6, x = 1$
- ב. לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = \frac{1}{6}, x = 1$
- ג. לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = -6, x = 1$

10. נתון הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{x(x-7)(2x+1)}$

קבעו איזה מהאגדים הבא נכון

- א. לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = 1, x = 7, x = 2$
- ב. לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = 1, x = 7, x = \frac{1}{2}$
- ג. לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = 0, x = 7, x = -\frac{1}{2}$
- ד. לפונקציה  $g(x)$  יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = 0, x = 7, x = -2$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

11. בכל אחד מהסעיפים קבעו מה האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

א.  $f(x) = \frac{x}{x-6}$     ב.  $f(x) = \frac{1}{x}$     ג.  $f(x) = \frac{2x+3}{x^2}$

ד.  $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-x}$     ה.  $f(x) = \frac{4}{x^2-x-6}$     ו.  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x^2-7x-4}$

ז.  $f(x) = \frac{x^2-4}{3x-1}$     ח.  $f(x) = \frac{-x}{x^2-x-2}$     ט.  $f(x) = \frac{12-x^2}{x^3-4x}$

12. בכל אחד מהסעיפים מצאו את תחום ההגדרה

א.  $f(x) = \frac{3x-9}{x^2-6x+10}$     ב.  $f(x) = \frac{2x}{x^2+6x+9}$     ג.  $f(x) = \frac{x-2}{4x-x^2-5}$

ד.  $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{6-x}$     ה.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$     ו.  $f(x) = \frac{-2x^2}{x^3-5x^2-14x}$

ז.  $f(x) = \frac{4+2x}{x^4-2x^2+1}$     ח.  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{(x^2+1)(x-4)}$     ט.  $f(x) = \frac{4-x}{x^4-1}$

14. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2-3x-5}{2bx+7}$ , פרמטר b

לפונקציה יש אסימפטוטה ב-  $x = 7$  או

מצאו את הפרמטר b



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 + ax - 8}$ , פרמטר a

לפונקציה יש אסימפטוטה ב-  $x = -2$

מצאו את הפרמטר a.

ג. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x^2 - mx + n}$ , m ו-n פרמטרים

לפונקציה יש אסימפטוטות ב-  $x = 5$  ו-  $x = -3$

מצאו את m ו-n

ד. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{(a-2)^2 x - 36}$ , m ו-n פרמטרים

נתון שהפונקציה שלפונקציה יש אסימפטוטה ב-  $x = 4$

מצאו את ערכו של a

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## נגזרת של פונקציית מנה (פונקציה רציונלית)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

דוגמה 1

$$h(x) = \frac{x^2}{2x - 3}$$

$$h'(x) = \frac{2x \cdot (2x - 3) - x^2 \cdot 2}{(2x - 3)^2}$$

דוגמה 2

$$h(x) = \frac{2x - x^2}{x^2 + 4x - 2}$$

$$h'(x) = \frac{(2 - 2x) \cdot (x^2 + 4x - 2) - (2x - x^2) \cdot (2x + 4)}{(x^2 + 4x - 2)^2}$$

נגזרת של הפונקציה מהסוג  $\frac{1}{x^n}$  תהייה לפי הנוסחה

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

לאחר פישוט נוכל לומר

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

דוגמאות

$$\left(\frac{1}{x^5}\right)' = -\frac{5}{x^6}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

### נגזרת של פונקציית מנה - תרגול

13. גזרו את הפונקציות הבאות

- א.  $f(x) = \frac{4}{x}$       ב.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x - 7}$       ג.  $f(x) = \frac{1}{x^3}$
- ד.  $f(x) = \frac{x}{x-6}$       ה.  $f(x) = \frac{3}{2x-5}$       ו.  $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{1-x^2}$
- ז.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 1}$       ח.  $f(x) = \frac{-x}{x^2 - x - 2}$       ט.  $f(x) = -\frac{1}{x^2 - 3x}$

14. גזרו את הפונקציות הבאות

- א.  $f(x) = \frac{3x-9}{x^2-6x+10}$       ב.  $f(x) = \frac{2x}{x^2+2x+2}$       ג.  $f(x) = \frac{x-2}{4x-x^2-5}$
- ד.  $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-6}$       ה.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$       ו.  $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2+x+2}$
- ז.  $f(x) = \frac{4+2x}{x^2}$       ח.  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$       ט.  $f(x) = \frac{4-x}{x^2-6x}$

15. גזרו את הפונקציות הבאות

- א.  $f(x) = x - \frac{4}{x}$       ב.  $f(x) = -\frac{2}{x} - x^2$
- ג.  $f(x) = -\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}$       ד.  $f(x) = 1 - 2x - \frac{18}{x}$
- ה.  $f(x) = \frac{16}{x^2} + x^2$       ו.  $f(x) = 4x + \frac{12x+9}{x}$
- ז.  $f(x) = \frac{9}{8x} + 8x$       ח.  $f(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{x^2}{6}$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורג

16. בכל אחד מהסעיפים מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בעזרת הפונקציה ונקודה הנתונה

א. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$  בנקודה שבה  $x=2$

ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x-6}$  בנקודה שבה  $x=0$

ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = -\frac{1}{x^2+2x+1}$  בנקודה שבה  $x=1$

ד. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$  בנקודה שבה  $x=-1$

ה. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$  בנקודה שבה  $x=-1$

17. בכל אחד מהסעיפים מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בעזרת הפונקציה ונקודה הנתונה

א. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4-x^2}{(x-1)^2}$  בנקודה שבה  $x=0$

ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^2-3x}{2x^2-x-6}$  בנקודה שבה  $x=1$

ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = -\frac{1}{2x^2}$  בנקודה שבה  $x=2$

ד. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x^2-7x-4}$  בנקודה שבה  $x=1$

ה. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{-x}{x^2-x-2}$  בנקודה שבה  $x=5$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## פונקציה רציונאלית, מציאת פרמטר ומשוואות משיק

1. נתונה הפונקציה הבאה  $y = \frac{x}{4} + \frac{a}{x}$ , המשיק לפונקציה בנקודה, שבה  $x=2$  מקביל לישר  $y =$

$$-\frac{3}{4}x + 6$$

מצאו את  $a$

תשובה: 2

2. נתונה הפונקציה הבאה  $y = \frac{x-4}{8} + \frac{2A}{x}$  לפונקציה יש נקודת מקסימום בנקודה שבה  $x = -4$

חשבו את ערכו של הפרמטר  $A$ .

תשובה: 1

3. נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = \frac{4a}{x} + \frac{x}{a} - 1$  הוא פרמטר גדול מאפס.

נתון בנוסף שלפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון בנקודה, שבה  $x=6$ .

מצאו את  $a$

תשובה: 1

4. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2-5x}{x^2-3x-1}$ , פרמטר  $a$

לפונקציה יש נקודת קיצון ב-  $x=1$ , מצאו את הפרמטר  $a$

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x - \frac{x}{a-x}$ , פרמטר  $a$

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x=2$  מקביל לציר ה- $x$ , מצאו את הפרמטר  $a$ .

ג. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{b}{x-6} - \frac{1}{x}$ , פרמטר  $b$

לפונקציה יש משיק בנקודה  $x=3$  המקביל לישר  $y=4$ , מצאו את הפרמטר  $a$

פתרון: א.  $a=2$ , ב.  $a=4$ , ג.  $b=1$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

15. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} + b$ , פרמטר  $b$   
לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה ש- $y=-2$ , מצאו את הפרמטר  $b$

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4+2x}{x^2} + a$ , פרמטר  $a$   
שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $y=-0.5$  מקביל לציר ה- $x$ , מצאו את הפרמטר  $a$ .

ג. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x^2} + m$ , פרמטר  $m$   
לפונקציה יש משיק בנקודה שבה שיעור ה- $y$  הוא 3 המקביל לישר  $y=-2x$ , מצאו את הפרמטר  $m$

פתרון: א.  $b=-1$ , ב.  $a=-0.25$ , ג.  $m=2$

16. ענו על הסעיפים הבאים

ה. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2-3x-5}{x^2+bx+4}$ , פרמטר  $b$   
לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=2$ , מצאו את הפרמטר  $b$

ו. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \left(\frac{x-1}{ax+2}\right)^2$ , פרמטר  $a$   
נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה  $x \neq 3$ , מצאו את הפרמטר  $a$ .

ז. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x^2-mx+n}$ , פרמטרים  $m$  ו- $n$   
לפונקציה יש אסימפטוטת ב- $x=4$  וב- $x=1$ , מצאו את הפרמטרים  $m$  ו- $n$

פתרון: א.  $b=-4$ , ב.  $a=-2/3$ , ג.  $m=5$ ,  $n=4$ .

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורג

17. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = 1 - x - \frac{1}{ax}$  פרמטר a , הפונקציה עוברת בנקודה (2,-1.5) הפרמטר a

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a(x+1)}{x^2} + b$  פרמטרים a ו-b הפונקציה עוברת בנקודות (1,9) , (2,4) מצאו את הפרמטרים a ו-b .

פתרון: א. a=1 , ב. a=4, b=1

18. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{bx^2+ax+3}{x^2}$  פרמטרים a ו-b לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה (3,-3/4) מצאו את הפרמטרים a ו-b

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a}{x^2-bx}$  פרמטרים a ו-b לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה (4,3/4) מצאו את הפרמטרים a ו-b

פתרון: א. a=2 , ב. b=-1 , ב. a=3, b=4

19. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = 1 - x - \frac{1}{ax}$  פרמטר a , הפונקציה עוברת בנקודה (2,-1.5) הפרמטר a

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a(x+1)}{x^2} + b$  פרמטרים a ו-b הפונקציה עוברת בנקודות (1,9) , (2,4) מצאו את הפרמטרים a ו-b .

פתרון: א. a=1 , ב. a=4, b=1

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאנר

20. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונות הפונקציות  $f(x) = 3 - \frac{1}{x-4}$ ,  $f(x) = \frac{1}{ax}$ , פרמטר  $a$   
המשיקים לפונקציות בנקודה שבה  $x=2$  מקבילים, מצאו את  $a$

ב. נתונות הפונקציות  $f(x) = 4 - \frac{1}{4x-x^2}$ ,  $f(x) = ax$ , פרמטר  $a$   
המשיקים לפונקציות בנקודה שבה  $x=1$  מקבילים, מצאו את  $a$

פתרון: א.  $a=-1$ , ב.  $a=1/9$

21. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{m(x+1)+2}{x^2} + 1$ , פרמטר  $m$

נתון שהמשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x=-3$  מאונך לציר ה- $y$ , מצאו את הפרמטר  $m$ .

ב. נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{b}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ , פרמטר  $b$

נתון שהמשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x=2$  מאונך לישר  $y = \frac{9}{10}x + 3$ , מצאו את הפרמטר  $m$ .

פתרון: א.  $m=4$ , ב.  $b=1$

22. ענו על הסעיפים הבאים

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2}$ , פרמטר  $a$

תחומי העלייה והירידה של הפונקציה הם:

עלייה:  $0 < x < 3$ , ירידה:  $x < 0$ ,  $x > 3$

מצאו את הפרמטר  $a$ .

ב. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{5x} - \frac{1}{ax^2}$ , פרמטר  $a$



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

תחומי העלייה והירידה של הפונקציה הם:

ירידה:  $-1 < x < 0$ , ירידה:  $x < -1$ ,  $x > 0$

מצאו את הפרמטר a.

פתרון: א.  $a=3$ , ב.  $a=10$

"קל להחטיא את המטרה אולם קשה לקלוע אליה" - אריסטו

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

## אסימפטוטה אופקית

על מנת להבין מהי אסימפטוטה האופקית של פונקציה נתבונן בדוגמה הבאה:

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

קעת ניצב בפונקציה את הערכים הבאים ונקבל את טבלת הערכים הבאה:

$x$	1	10	100	1000	100,000	1,000,000
$f(x)$	0.166	0.6666	0.9523	0.9950	0.9999	0.9999

ניתן לראות שכל שניצב בפונקציה מספר יותר גדול נקבל מספר שיותר קרוב ל-1

קעת ניצב בפונקציה את הערכים שלילים ונקבל את טבלת הערכים הבאה:

$x$	-1	-10	-100	-1000	-100,000	-1,000,000
$f(x)$	-0.25	2	1.0526	1.0050	1.00005	1.000005

מהטבלאות הבאות ניתן לומר שלפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית ב- $y = 1$

**אסימפטוטה אופקית - ערך או ישר שהפונקציה שואפת אליו כאשר מציבים מספרים גדולים מאוד**

דרך נוספת לרשום:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+5} \right) = 1, \quad y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{x+5} \right) = 1$$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## קריטריונים לקביעת אסימפטוטה אופקית בצורה מהירה

"חזק" - חזקה גבוהה יותר

(1) אם מונה "חזק" מהמכנה - אין אסימפטוטה - דוגמה:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+6} \right) = \infty$

(2) אם המכנה "חזק" מהמונה - אסימפטוטה ב-  $y = 0$  - דוגמה:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+x}{x^3+6x} \right) = 0$

(3) אם מונה "שווה" למכנה - לפי מקדמים - דוגמה:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2}{5x^2+6x} \right) = \frac{3}{5}$

(4) אם יש כמה חלקים - מחברים - דוגמה:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{7x+4} + \frac{x}{x^2+2} - 1 \right) = \frac{3}{7} + 0 - 1 = -\frac{4}{7}$

23. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{2x+5}$

א. הציבו בפונקציה את הערכים הבאים

$x = 1,000,000$ .iii	$x = 1000$ .ii	$x = 10$ .i
$y = 1$ .iv	$y = 2$ .iii	$y = 100$ .ii

ב. קבעו מהי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה לפי סעיף א'

24. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2+4x}{-x^2+5}$

א. הציבו בפונקציה את הערכים הבאים

$x = 1,000,000$ .iii	$x = 1000$ .ii	$x = 10$ .i
$y = -1$ .iii	$y = 100$ .ii	$y = 1$ .i

ג. קבעו מהי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה לפי סעיף א'

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

$$f(x) = \frac{3x}{-2x^2 + 9x}$$

25. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3x}{-2x^2 + 9x}$ . הציבו בפונקציה את הערכים הבאים

i. $x = -100$	ii. $x = -10,000$	iii. $x = -1,000,000$
---------------	-------------------	-----------------------

ד. קבעו מהי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה לפי סעיף א'

i. $y = 3$	ii. $y = 0$	iii. $y = -3$
------------	-------------	---------------

26. מצאו בכל סעיף את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה אם יש לה

א. $f(x) = \frac{4}{x}$	ב. $f(x) = \frac{x}{x-3}$
-------------------------	---------------------------

ג. $f(x) = -\frac{4x^2}{x+5}$	ד. $f(x) = \frac{18x}{x^3+7x}$
-------------------------------	--------------------------------

ה. $f(x) = \frac{-x^2+4x}{2x^2}$	ו. $f(x) = \frac{12x^3+3x^2+x+9}{4x^3+5}$
----------------------------------	---

ז. $f(x) = \frac{4x^5}{8x+6}$	ח. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$
-------------------------------	----------------------------

27. מצאו בכל סעיף את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה אם יש לה

א. $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$	ב. $f(x) = 1 - \frac{x}{x-3}$
-----------------------------	-------------------------------

ג. $f(x) = \frac{1}{x} + x$	ד. $f(x) = \frac{x}{-x^3-2x} + 2$
-----------------------------	-----------------------------------

ה. $f(x) = \frac{3x-x^2}{x^2}$	ו. $f(x) = \frac{x}{x+5} + \frac{2x^4+1}{x^4}$
--------------------------------	--

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

28. נתונה אסימפטוטה אופקית

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{-ax^2}{x^2+6x+4}$ , פרמטר  $a$   
לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית ב-  $y=2$ , מצאו את הפרמטר  $a$

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2b + \frac{4-x}{(x-1)(x-3)}$ , פרמטר  $a$   
לפונקציה יש אסימפטוטה ב-  $y=1$ , מצאו את הפרמטר  $b$ .

פתרון: א.  $a=-2$ , ב.  $b=0.5$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות 5 יח"ל**  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## נקודות סליקה ואסימפטוטה אנכית

על מנת להבין מהי נקודות סליקה של פונקציה (חור) נעזר בדוגמה הבאה:

$$f(x) = \frac{x}{x(x-3)}$$

נתונה הפונקציה

כעת ניצב בפונקציה את הערכים סביב  $x=0$  ונקבל:

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-0.3225	-0.3322	-0.3332	אין	-0.3334	-0.3344

כעת נבנה טבלת ערכים סביב  $x=3$

$x$	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	-10	-100	-1000	אין	1000	100

מ-2 הטבלאות ניתן לומר שסביב  $x=3$  הפונקציה מקבילת ערכים גדולים מאוד ומצד שני ערכים קטנים מאוד ולכן אפשר להסיק שיש אסימפטוטה אנכית לפונקציה  $f(x)$  ב- $x=3$  כפי שלמדנו.

וסביב הנקודה  $x=0$  (משני צידי הנקודה) הפונקציה מקבלת ערכים סופיים המתקרבים ל- $-\frac{1}{3}$  ולכן ניתן לומר שלפונקציה  $f(x)$  יש נקודת אי רציפות סליקה (חור) ב- $x=0$

## שלבי מציאת נקודות סליקה (חור)

**שלב א** - בדיקה מתי המונה והמכנה של הפונקציה מתאפסים

אם יש ערכים של  $x$  שבהם המונה והמכנה מתאפסים אז יש חשד לחור, ניתן לקבוע ששאר הערכים שמאפסים רק את המכנה הם למעשה אסימפטוטות אנכיות לפונקציה

**שלב ב** - צימצום של המכנה והמונה

- כעת אם ערך ה- $x$  שלפני הצימצום איפס את הכנה ומונה כבר לא מאפס את המכנה אז ניתן לקבוע שיש לפונקציה "חור" בערך זה.

- אם אותו ערך של  $x$  עדין מאפס את המכנה אז לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית בערך זה.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב-5 יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

$$f(x) = \frac{x-2}{x(x-2)}$$

א. מלאו את הטבלה הבאה על ידי הצבה בפונקציה הנתונה:

$x$	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$						

ב. מהטבלה מה ניתן לומר שיש לפונקציה ב- $x=2$

(1) נקודת אי רציפות סליקה (חור)

(2) אסימפטוטה אנכית

30. נתונה שלפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x(x+3)}$  יש אסימפטוטה אנכית אחת ונקודת "חור" אחת

א. רשמו עבור אילו ערכי  $x$  המכנה של הפונקציה מתאפס

ב. רשמו עבור אילו ערכי  $x$  המונה של הפונקציה מתאפס

ג. קבעו מה הטענה הנכונה:

(1) לפונקציה יש "חור" ב- $x=3$  ואסימפטוטה ב- $x=0$

(2) לפונקציה יש "חור" ב- $x=0$  ואסימפטוטה ב- $x=-3$

(3) לפונקציה יש "חור" ב- $x=-3$  ואסימפטוטה ב- $x=0$

$$f(x) = \frac{x-2}{x(x-2)^2}$$

א. מלאו את הטבלה הבאה על ידי הצבה בפונקציה הנתונה:

$x$	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$						

ב. מה ניתן להסיק מהטבלה:

(1) לפונקציה יש "חור" ב- $x=2$  ואסימפטוטה ב- $x=0$

(2) לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=2$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

32. קבעו בכל סעיף מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה ואם יש לה נקודות סליקה (חור)

א.  $f(x) = \frac{4x}{x(x-2)}$       ב.  $f(x) = \frac{x-1}{x-9}$

ג.  $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x+5)}$       ד.  $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$

ה.  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2(x-1)}$       ו.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2-16}$

ז.  $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$       ח.  $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

33. קבעו בכל סעיף מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה ואם יש לה נקודות סליקה (חור)

א.  $f(x) = \frac{1-x}{x^2-x}$       ב.  $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2(x-3)}$

ג.  $f(x) = \frac{x^3}{x-3}$       ד.  $f(x) = \frac{x^3}{x^3-9x}$

ה.  $f(x) = \frac{x^2-4x-21}{x^2-14x+49}$       ו.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2+16}$

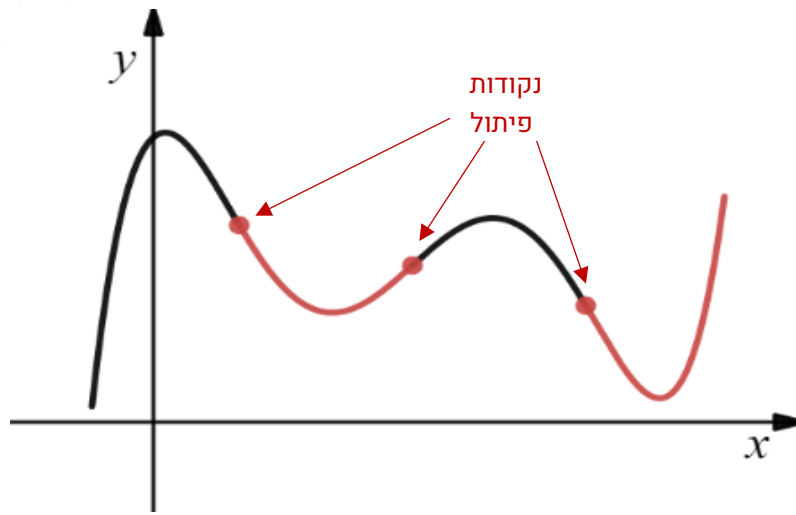
ז.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-3}$       ח.  $f(x) = \frac{x^2-6}{2x^3-12x}$



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ב5 יח"ל**  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

## נקודות פיתול ותחומי קערות וקמירות

נקודות הפיתול של הפונקציה הן הנקודות שבהן לגרף הפונקציה יש מעבר משינוי שלילי לחיובי או להיפך



בשרטוט ניתן לראות 3 נקודות פיתול, כאשר החלקים הצבועים בשחור הם תחומי הקמירות והחלקים הצבועים באדום הם תחומי הקערות של הפונקציה

למעשה בנקודות הפיתול של הפונקציה יש מעבר מקמירות  $\cap$  לקערות  $U$  של הגרף או להיפך.

מציאת נקודות הפיתול נעשית בעזרת הנגזרת השנייה, שהיא למעשה קובעת את **גודל שינוי בשיפוע** של הגרף.

נתבונן בתחום שבו הפונקציה קעורה  $U$ .

ניתן לראות שיפועי המשיקים לפונקציה הולכים וגדלים משיפוע שלילי, דרך שיפוע אפס (בנקודת קיצון) ואז לשיפוע חיובי.

את נקודות הפיתול אנו מוצאים על ידי השוואה של הנגזרת השנייה ל-אפס ובדיקה על ידי הצבה בתחומים שבין ערכי ה- $x$  שהתקבלו

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

דוגמה

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3$$

נתונה שלפונקציה הפונקציה פעמיים:

$$f''(x) = 3x^2 - 12$$

כאשר נשווה לאפס ונקבל

$$x = 2, x = -2$$

כעת נבדוק את ערכי הנגזרת השנייה סביב הערכים שקבלנו - על ידי הצבה

$x$	$x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$x > 2$
$f(x)$	U		∩		U
$f''(x)$	+	0	-	0	+

מהטבלה ניתן להסיק

כאשר הנגזרת השנייה שלילית - יש תחום קמירות ∩

כאשר הנגזרת השנייה חיובית - יש תחום קעירות U

ולכן בנקודות שבהן  $x=2$  ו- $x=-2$  יש מעבר מקעירות לקמירות ולהיפך, מכך נובא שיש לפונקציה נקודות פיתול בנקודות שבהן  $x=2$  ו- $x=-2$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

13. נתונה שלפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3$

א. גזרו את הפונקציה פעמים

ב. השוו את הנגזרת השנייה ל-0 ופתרו

ג. השלימו את הטבלה הבאה

$x$		0		4	
$f(x)$					
$f''(x)$					

ד. קבעו את מהן נקודות הפיתול של הפונקציה  $f(x)$

14. נתונה שלפונקציה  $h(x) = \frac{1}{x^2} - 3x^2$

א. גזרו את הפונקציה פעמים

ב. השוו את הנגזרת השנייה ל-0 ופתרו

ג. השלימו את הטבלה הבאה

$x$		-1		1	
$h(x)$					
$h''(x)$					

ד. קבעו את מהן נקודות הפיתול של הפונקציה  $h(x)$

15. נתונה שלפונקציה  $g(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 - x^2$

א. השוו את הנגזרת השנייה ל-0 ופתרו

ב. השלימו את הטבלה הבאה

$x$		-1		1	
$g(x)$					
$g''(x)$					

ג. קבעו את מהן נקודות הפיתול של הפונקציה  $g(x)$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - גאורג קאנור

16. נתונה שלפונקציה  $f(x) = x^4$

הראו שאין לפונקציה  $f(x)$  נקודות פיתול

34. מצאו את נקודות הפיתול של כל פונקציה

א.  $f(x) = x^3$       ב.  $f(x) = x^3 + 3x^2$

ג.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2$       ד.  $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^2 + 2x$

ה.  $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 - x^2$       ו.  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$

35. מצאו את נקודות הפיתול של כל פונקציה

א.  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$       ב.  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

ג.  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$       ד.  $f(x) = \frac{3}{x} - 2x^2$

ה.  $f(x) = \frac{-x}{x^2-1}$       ו.  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

13. נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^4 - 3x^2$ , פרמטר  $a$

בנוסף נתון שלפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$ .

א. מצאו את ערכו של  $a$

ב. קבעו האם יש לפונקציה נקודות פיתול שבה שיפוע הפונקציה הוא אפס

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

14. נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2$ , פרמטר  $a$

נתון ששיפוע המשיק לפונקציה  $x = 1$  הוא 3 ושיש לה נקודת פיתול בנקודה שבה  $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$

מצאו את ערכם של  $a$  ו- $b$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

## פונקציה רציונאלית מלאה

### דוגמא לחקירה מלאה - פונקציה רציונאלית.

נחקור את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2x + 4$$

#### א. תחום הגדרה של הפונקציה:

שלב ראשון של חקירה מתחיל במציאת תחום הגדרה, כאשר ידוע שפונקציה רציונלית אינה מוגדרת לערכים של  $x$  המאפסים את המכנה ולכן תחום ההגדרה יהיה  $x \neq 0$  זאת אומרת שניתן להציב כל ערך של  $x$  מלבד 0.

#### ב. מציאת נקודות חשודות (קיצון (min, max) או פיתול)

בנקודות הקיצון (ובחלק נקודות הפיתול) של הפונקציה אנו יודעים ששיפוע המשיק הוא אפס. זכור, שיפוע המשיק של הפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודה ולכן הפונקציה:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 2$$

לאחר מכן נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל את המשוואה הבאה:  $-\frac{2}{x^2} + 2 = 0$  נמצא מכנה משותף לכל הפונקציה במקרה זה  $x^2$  ונקבל  $-2 + 2x^2 = 0$  נעביר אגפים ונקבל  $2x^2 = 2$  לאחר חילוק ב-2 נקבל  $x^2 = 1$  פתרונות המשוואה הם:

$$x = 1$$

והפתרון הנוסף

$$x = -1$$

נציב את הפתרונות בפונקציה ונקבל את שיעור  $y$  של כל נקודה

$$(1, 8), (-1, 0)$$

על מנת למצוא את סוג הנקודה (מינימום, מקסימום או פיתול) נצטרך למצוא את תחומי העלייה והירידה.

#### ג. מציאת תחומי עלייה וירידה:

אנו יודעים שבין נקודות הקיצון יש תחומי עלייה וירידה, כמו שכבר נאמר שיפוע המשיק לפונקציה בכל נקודה ניתן למצוא בעזרת פונקציית הנגזרת ע"י הצבה של שיעור  $x$  בנגזרת. אנו מתרכזים בתחומים שבין נקודות הקיצון.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

בתחום ש-  $x < -1$  נציב  $x = -2$

$$f'(-2) = -\frac{2}{(-2)^2} + 2 = 1.5 > 0$$

בתחום ש-  $-1 < x < 0$  נציב  $x = -0.5$

$$f'(-0.5) = -\frac{2}{(-0.5)^2} + 2 = -6 < 0$$







בתחום ש-  $0 < x < 1$  נציב  $x = 0.5$

$$f'(0.5) = -\frac{2}{(0.5)^2} + 2 = -6 < 0$$

בתחום ש-  $x > 1$  נציב  $x = 2$

$$f'(2) = -\frac{2}{(2)^2} + 2 = 1.5 > 0$$

נסדר את הנתונים שקבלנו בטבלה:

$x$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$-1 < x < 0$	$x = 1$	$x > 1$
$f(x)$				לא מוגדר			
$f'(x)$	+	0	-	לא מוגדר	-	0	+

תחומים שערך הנגזרת חיובי הפונקציה עולה ובתחומים שערך הנגזרת שלילי הפונקציה יורדת ולכן:

תחומי ירידה:  $x \neq 0$   $-1 < x < 1$

תחומי העלייה:  $x > 1$ ,  $x < -1$

### ד. אסימפטוטות מקבילות לצירים

אסימפטוטה מקבילה לציר ה- $y$ : את האסימפטוטה המאונכת לציר ה- $x$  אנו יודעים בדרך כלל לפי

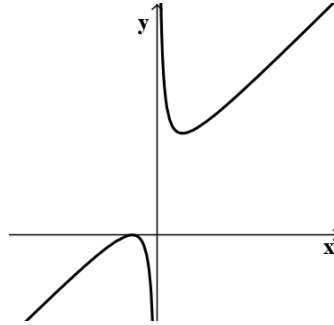
תחום ההגדרה של הפונקציה. במקרה שלנו  $x \neq 0$  ולכן האסימפטוטה תהיה ב-  $x = 0$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ב5 יח"ל**  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

**אסימפטוטה מקבילה לציר ה-x** : את האסימפטוטה המאונכת לציר ה-y אנו יודעים בעזרת הצבה של מספרים גדולים בפונקציה (ראו הסבר בעמוד). לכן אם נציב בפונקציה ערכים של x נוכל לראות שערכי ה-y שמתקבלים הולכים וגדלים ולכן **אין אסימפטוטה המקבילה לציר ה-x** לפונקציה. ולכן אין אסימפטוטה לפונקציה

x	10	100	1000
y	24.2	204.02	2004.002

ה. שרטוט הגרף של הפונקציה





לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח 5"  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

15. חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות קיצון, קיבעו את סוג הנקודה (מינימום, מקסימום או פיתול)

ג. מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציה

ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

ה. מהן האסימפטוטות מקבילות לצירים (אם יש כאלה)

ו. שרטוט הפונקציה.

א.  $f(x) = 1 - 2x - \frac{18}{x}$       ב.  $f(x) = \frac{9}{8x} + 8x$       ג.  $f(x) = -\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}$

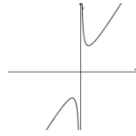
ד.  $f(x) = x - \frac{4}{x}$       ה.  $f(x) = -\frac{2}{x} - x^2$       ו.  $f(x) = 4x + \frac{12x+9}{x}$

ז.  $f(x) = \frac{16}{x^2} + x^2$       ח.  $f(x) = -\frac{9}{x} + \frac{x^2}{6}$

"מי הוא גאון? אפריקאי שחושב על שלג" - נבוקוב

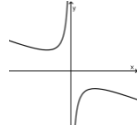
## תשובות - חקירה

1. תשובה: א.  $x \neq 0$ , ב.  $\min(-3, 13), \max(3, -11)$ , ג. יורדת:  $x < -3$ ,  $x > 3$ , עולה:  $-3 < x < 3$

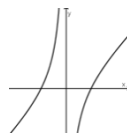


ו.  $x < 0$ , ד. אין, ה.  $X=0$ , ז.  $x < 3$

2. א.  $x \neq 0$ , ב.  $\min(2\frac{2}{3}, 21.75), \max(-2\frac{2}{3}, -21.75)$ , ג. עולה:  $x < -2\frac{2}{3}$ ,  $x > 2\frac{2}{3}$ , ירידה:  $-2\frac{2}{3} < x < 2\frac{2}{3}$

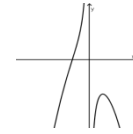


ו.  $x < 0$ , ד. אין, ה.  $X=0$ , ז.  $-2\frac{2}{3} < x < 2\frac{2}{3}$



3. א.  $x \neq 0$ , ב. אין, ג. עולה  $x \neq 0$ , ד.  $(-2, 0), (2, 0)$ , ה.  $X=0$ , ו.  $x < -2$ , ז.  $0 < x < 2$ , ח. ירידה:  $-2 < x < 2$ , ט.  $x > 2$

4. א.  $x \neq 0$ , ב.  $\text{Max}(1, -3)$ , ג. עולה  $x \neq 0$ , ד.  $(1, 26, 0)$ , ה.  $X=0$ , ו.  $x < 1$ , ז. ירידה:  $x > 1$

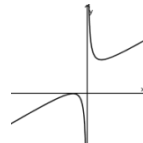


5. א.  $x \neq 0$ , ב.  $\min(2, 8), \min(-2, 8)$ , ג. עולה:  $-2 < x < 0$ ,  $x > 2$ , ירידה:  $0 < x < 2$ , ד.  $x < -2$ , ה.  $x > 2$



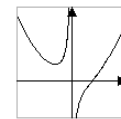
ו.  $X=0$ , ז. אין, ח.  $X=0$ , ט.  $-2 < x < 2$

6. א.  $x \neq 0$ , ב.  $\min(1.5, 24), \max(-1.5, 0)$ , ג. עולה:  $x < -2$ ,  $x > 2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$ , ד.  $x < -3$ , ה. ירידה:  $x > -3$



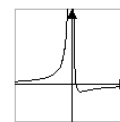
ו.  $X=0$ , ז.  $(-1.5, 0)$ , ח.  $x \neq 0$ , ט.  $x < -3$ , י.  $x > -3$

7. א.  $x \neq 0$ , ב.  $\text{Min}(-3, 4.5)$ , ג. עולה  $x \neq 0$ , ד.  $(3.78, 0)$ , ה.  $X=0$ , ו.  $x < 0$ , ז. ירידה:  $0 < x < 1$ , ח.  $x > 1$ , ט. עולה  $x < 0$ , י.  $x > 1$



יא.  $X=0$ , יב.  $(0.5, 0)$ , יג.  $0 < x < 1$ , יד.  $0 < x < 1$ , יה.  $X=0$ , יז.  $x < 0$ , יח.  $x > 1$ , יט. עולה  $x < 0$ , יא.  $x > 1$

8. א.  $x \neq 0$ , ב.  $\text{Min}(1, -2)$ , ג. עולה  $x < 0$ , ד.  $(0.5, 0)$ , ה.  $X=0$ , ו.  $x < 0$ , ז. ירידה:  $0 < x < 1$ , ח.  $x > 1$ , ט. עולה  $x < 0$ , י.  $x > 1$



יא.  $y = 0$ , יב. שירטוט

**תזכורת:**

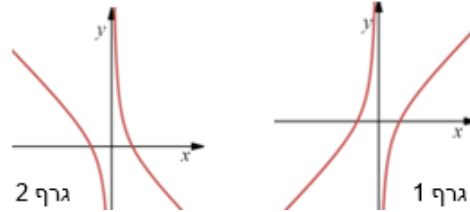
$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$$

לא להתבלבל, כאשר ה-  
x במונה גוזרים רגיל

$$\left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}$$

16. נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{1}{x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראו שלפונקציה אין נקודות קיצון.
- מה הם תחומי עלייה וירידה של הפונקציה
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x
- לפניך שני גרפים, איזה מבין הגרפים מתאר את גרף הפונקציה הנתונה?  
נמק.



17. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{9}{x} + 4x - 2$

- רשמו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- מצאו את תחומי הירידה של הפונקציה.
- שרטטו את גרף הפונקציה.

18. נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{a}{x}$

- המשיק לפונקציה בנקודה, שבה  $x=2$  מקביל לישר  $y = -\frac{3}{4}x + 6$
- מצאו את a.
  - הציבו את  $a=4$  וענו על הסעיפים הבאים  
(1) האם יש נקודות חיתוך עם הצירים?  
(2) מצאו נקודות קיצון. וקבעו את סוגן  
(3) רשמו נקודה שבה הפונקציה עולה ונקודה בה היא יורדת. מהן האסימפטוטות המאונכות לציר ה-x.
  - שרטטו את הפונקציה בגרף.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

19. נתונה הפונקציה הבאה  $y = \frac{16}{x} + \frac{1}{2}x^2$

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה
  - (2) מצאו נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים. (דייקו שתי ספרות אחרי הנקודה)
  - (3) מצאו נקודת קיצון וקבעו, את סוגה.
  - (4) עבור אילו ערכי x הפונקציה הנתונה עולה?
  - (5) שרטטו את גרף הפונקציה.
- ב. עבור אילו ערכים של k, חותך הישר  $y=k$  את הפונקציה, בשלוש נקודות.

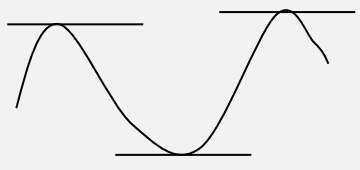
20. נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצאו נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ד. מצאו את תחומי עלייה וירידה.
- ה. מה הן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים?
- ו. שרטטו את גרף הפונקציה

21. נתונה הפונקציה הבאה  $y = \frac{x-4}{8} + \frac{2}{x}$

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) מצאו נקודת המינימום של הפונקציה.
- (3) שרטטו את גרף הפונקציה
- ב. רשמו שלוש נקודות שבהן הפונקציה עולה.
- ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה, בנקודת המינימום שלה.

**תזכורת:**



נקודות קיצון מקומיות של הפונקציה  
 הן נקודות שבהן שיפוע המשיק  
 לפונ' הוא אפס ולכן נשווה את  
 הנגזרת לאפס מכיוון שאנו  
 יודעים ש-  
**שיפוע המשיק = נגזרת בנקודה**

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאנר

22. נתונה הפונקציה הבאה  $y = \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו נקודות חיתוך של הפונקציה עם הציר ה-x.
- מצאו נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.
- מצאו את לאילו ערכי x הפונקציה הנתונה עולה.
- מה הן האסימפטוטות של הפונקציה, המקבילות לצירים?
- שרטטו את גרף הפונקציה

23. נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = \frac{4a}{x} + \frac{x}{a} - 1$   $a > 0$

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה, שבה  $x=6$ .

- מצאו את a.
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- האם יש נקודות חיתוך עם הצירים?
- מצאו נקודות קיצון, וקבעו את סוגן.
- מצאו את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מהן האסימפטוטות המאונכות לציר ה-x.
- שרטטו את הפונקציה בגרף.

**תזכורת:**  
צימצום לפני גזירה

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 5}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} - \frac{5}{x}$$

$$f(x) = x - 3 - \frac{5}{x}$$

כעת ניתן ליגזור על פ' נגזרת מיידית.

24. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{-x^2 + x - 9}{x}$

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- שרטטו את הפונקציה.
- מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

תזכורת:

$$\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{ax^2}$$

25. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{4x} + \frac{x^2}{8}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה .
- ב. מצאו את נקודת קיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.
- ג. מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מצאו את האסימפטוטה המקבילה לציר ה-y
- ה. מצאו נקודה חיתוך עם ציר ה-x.
- ו. שרטטו את הפונקציה במערכת צירים.

26. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה .
- ב. האם יש נקודות חיתוך לפונקציה עם ציר ה-x
- ג. מצאו את נקודות קיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ד. מצאו את האסימפטוטה המקבילה לציר ה-y.
- ה. האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה בה  $x = -0.5$  ?

27. נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{4x-4}{x}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה .
- ב. האם יש נקודות חיתוך לפונקציה עם ציר ה-x, אם כן מצאו אותן.
- ג. מצאו את נקודות קיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ד. מצאו את האסימפטוטה המקבילה לציר ה-y.
- ה. שרטטו את הפונקציה במערכת צירים ?

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח 5" ל"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## פתרונות תרגילים 18-29

1. א  $x \neq 0$ , ב. הוכחה, ג. עולה לכל ערך של  $x$  ד.  $(-1, 0), (1, 0)$  ה. גרף 1
2. א.  $x \neq 0$  ב. אין ג.  $\max(-1.5, -14)$   $\min(1.5, 10)$  ד. ירידה:  $-1.5 < x < 1.5$ , ה. בסוף הספר
3. א.  $x \neq 0$  ב. אין ג.  $\max(-4, -2)$   $\min(4, 2)$  ד. ירידה:  $-4 < x < 4, x \neq 0$  עלייה:  $x > 4, x < -4$  ה.  $x = 0$  ו.  $X=0$  ז. בסוף הספר
4. א.  $x \neq 0$  ב.  $(-4, 0)$  ג.  $\max(-8, -1.5)$  ד. ה.  $X=0, y=0$  ו. בסוף הספר
5. א  $x \neq 0$  ב.  $(\sqrt[3]{32}, 0)$  ג.  $\max(2, -6)$  ד.  $0 < x < 2, x < 0$  ה. בסוף הספר ו.  $k < -6$
6. א.  $x \neq 0$  ב.  $\max(-4, -1.5), \min(4, 0.5)$  ג. עלייה:  $x > 4, x < -4$  ד.  $y = -0.5$
7. **תשובה:** א.  $x \neq 0$  ב.  $(2, 0)$  ג.  $\max(-2, -8)$   $\min(2, 0)$  ד.  $x = 0$  ה. בסוף הספר
8. **תשובה:** א.  $x \neq 0$  ב. אין ג.  $\max(-1, -1)$   $\min(1, 1)$  ד.  $x = 0$  ה. יורדת
9. **תשובה:** א.  $x \neq 0$  ב.  $\min(1, 0.375)$  ג. עלייה  $x > 1$  ירידה  $x < 1, x \neq 0$  ד.  $x = 0$  ה.  $(\sqrt[3]{-2}, 0)$  ו. בסוף הספר
- 10.
11. **תשובה:** א.  $x \neq 0$  ב. אין ג.  $\max(3, -5)$   $\min(-3, 7)$  ד. עלייה:  $-3 < x < 3, x \neq 0$  ירידה:  $x > 3, x < -3$  ה. בסוף הספר ו.  $y = 7$
12. **תשובה:** א.  $x \neq 0$  ב. אין ג.  $\max(6, 3)$   $\min(-6, -5)$  ד. ירידה:  $-6 < x < 6, x \neq 0$  עלייה:  $x > 6, x < -6$  ה. בסוף הספר
- 13.
14. **תשובה:** א.  $x \neq 0$  ב.  $(\frac{1}{2}, 0)$  ג.  $\max(1, 2)$  ד. עולה:  $0 < x < 1$  ה.  $y = 0, x = 0$  ו. בסוף הספר

"צירוף מקרים הוא הדרך של אלוהים להישאר אנונימי" - אלברט אינשטיין

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

## דוגמה לחקירה מלאה

נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$$

א. **תחום הגדרה:** בפונקציה רציונאלית הנקודות היחידות שבהן הפונקציה לא מוגדרת הן הנקודות בהן המכנה של הפונקציה מתאפס (שווה אפס) ולכן ננסה למצוא את נקודות אלה ע"י השוואת המכנה לאפס:  $x^2 - 6x + 8 = 0$  פתרונות המשוואה הם:  $x=2$  ו- $x=4$ . ולכן הפונקציה מוגדרת בתחום:  $x \neq 2, x \neq 4$

ב. אסימפטוטות המקבילות לצירים:

אסימפטוטה אנכית (אסימפטוטה המקבילה לציר ה-y):  
ניתן לזהות לפי תחום ההגדרה (בשאלון 804) ולכן ניתן להגיד שיש אסימפטוטות אנכיות ב- $x=2$  ו- $x=4$

\* הפונקציות בשאלון 804 אינו מכיל נקודות אי רציפות סינגולריות ולכן ניתן לפי הנקודות שמאפסות את המכנה.

אסימפטוטה אופקית (המקבילה לציר ה-x)

נחשב לפי הגבול הבאה (ראו פתרון לפי גבולות בעמוד):  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x^2 - 6x + 8} \right) = 0$

ניתן להגיד שכאשר החזקה הגבוהה ביותר במכנה גדול מהחזקה הכי גדולה במונה הפונקציה תקבל אסימפטוטה ב- $y=0$

ג. נקודות קיצון (נקודות בן שיפוע המשיק לפונקציה שווה לאפס, ושיש שינוי במגמת שינוי בנקודה).  
לכן נגזור את הפונקציה תחילה

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 6x + 8) - x(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 8)^2} = \frac{-x^2 + 8}{(x^2 - 6x + 8)^2}$$

נקבל שהנגזרת הסופית היא:  $f'(x) = \frac{-x^2 + 8}{(x^2 - 6x + 8)^2}$  כעת נשווה ל-0:  $0 = -x^2 + 8$   
\*ניתן להשוות רק את המונה של הפונקציה. פתרונות המשוואה הם:  $x=\sqrt{8}, x=-\sqrt{8}$

כעת נבדוק את ערך הנגזרת של הפונקציה סביב הנקודות שקיבלנו.



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

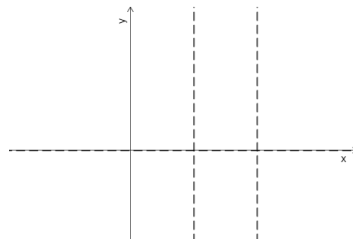
		$x = -\sqrt{8}$		$x=2$		$x = \sqrt{8}$		$x=4$	
$f(x)$	↘	min	↗	---	↗	max	↘	---	↘
$f'(x)$		0		---		0		---	

לאחר מציאת ערך ה-y בעזרת הפונקציה נוכל לקבוע שנקודות הקיצון הן:  
 $\min(-\sqrt{8}, -0.08) \quad \max(\sqrt{8}, -2.91)$

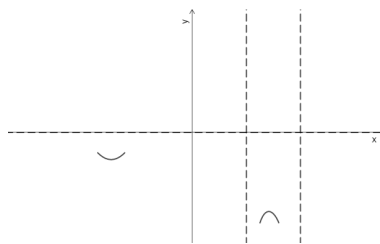
ד. תחומי עלייה וירידה ניתן לראות מהטבלה:  
עלייה:  $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$ , ירידה:  $x < -\sqrt{8}$  או  $x > \sqrt{8}$ ,  $x \neq 2, 4$

ה. נקודות חיתוך עם צירים:  
עם ציר ה-x,  $y=0$ :  $\frac{x}{x^2-6x+8} = 0$  הפתרון היחיד הוא כאשר  $x=0$  ולכן:  $(0,0)$   
עם ציר ה-y,  $x=0$ :  $y = \frac{0}{0^2-6\cdot 0+8} = 0$  ולכן:  $(0,0)$

ו. כעת נשרטט את הפונקציה: תחילה נסמן את האסימפטוטות של הפונקציה

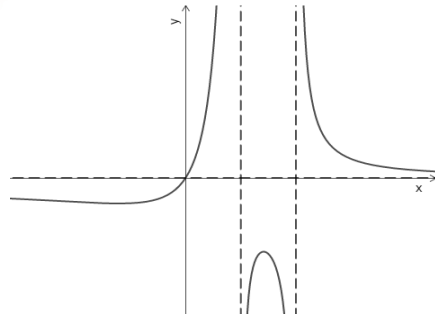


כעת נוסיף את נקודות הקיצון של הפונקציה:



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח 5 ל"א  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

כעת ניתן רק לשרטט לפי תחומי העלייה והירידה ונקודות החיתוך עם הצירים



דוגמה	נוסחה	
$f(x) = \frac{x+1}{3x^2-2x}$ $f'(x) = \frac{1 \cdot (3x^2-2x) - (x+1) \cdot (6x-2)}{(3x^2-2x)^2}$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	נגזרת מנה של שתי פונקציות
$\left(-\frac{2}{x}\right)' = \frac{2}{x^2}$	$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$	נגזרת מידיית של מנה 1
$\left(\frac{3}{x^2}\right)' = -\frac{2 \cdot 3}{x^3}$	$\left(\frac{a}{x^2}\right)' = -\frac{2a}{x^3}$	נגזרת מידיית של מנה 2
$\left(\frac{1}{3x+4}\right)' = -\frac{1 \cdot 4}{(3x+4)^2}$	$\left(\frac{a}{bx+c}\right)' = -\frac{a \cdot b}{(bx+c)^2}$	נגזרת מידיית של מנה 3
$\left(\frac{a}{x-6x^2}\right)' = -\frac{a \cdot (1-12x)}{(x-6x^2)^2}$	$\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = -\frac{a \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$	נגזרת מידיית 4 של מנה

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

חקרו את הפונקציות הבאות (תחום הגדרה, אסימפטוטות, קיצון, עלייה וירידה, פיתול ושרטוט)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x - 4} \quad .30$$

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 - 6x - 7} \quad .29$$

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - x} \quad .28$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2} \quad .33$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad .32$$

$$f(x) = \frac{x}{x - 6} \quad .31$$

$$f(x) = \frac{12 - x^2}{x^2 - 3x} \quad .36$$

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 - x - 2} \quad .35$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 1} \quad .34$$

חקרו את הפונקציות הבאות (תחום הגדרה, אסימפטוטות, קיצון, עלייה וירידה, פיתול ושרטוט)

$$f(x) = \frac{x - 2}{4x - x^2 - 5} \quad .39$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} \quad .38$$

$$f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 6x + 10} \quad .37$$

$$f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 + x + 2} \quad .42$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} \quad .41$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 6} \quad .40$$

$$f(x) = \frac{4 - x}{x^2 - 6x} \quad .45$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} \quad .44$$

$$f(x) = \frac{4 + 2x}{x^2} \quad .43$$

חקרו את הפונקציות הבאות (תחום הגדרה, אסימפטוטות, קיצון, עלייה וירידה, פיתול ושרטוט)

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x + 4} \quad .48$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \quad .47$$

$$f(x) = \frac{3x - 15}{x^2 - 9} \quad .46$$

$$f(x) = \frac{4 + x + x^2}{-x^2 - x + 2} \quad .51$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 4} \quad .50$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6} \quad .49$$

$$f(x) = \frac{4 - x}{(x - 1)(x - 3)} \quad .54$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 4x + 4} \quad .53$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} \quad .52$$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

28. חקרו את הפונקציות הבאות (תחום הגדרה, אסימפטוטות, קיצון, עלייה וירידה, פיתול ושרטוט)

$$f(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4} \quad .56$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2-9} \quad .55$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad .58$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} \quad .57$$

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \quad .60$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4x+4} - 2 \quad .59$$

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{x} \quad .62$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \quad .61$$

$$f(x) = x - \frac{x}{4-x} \quad .64$$

$$f(x) = \frac{x^2-x}{x^3} \quad .63$$

$$f(x) = 3 - \frac{x^2}{(x-4)^2} \quad .66$$

$$f(x) = \frac{x^2-3x}{2x^2-x-6} \quad .65$$

$$f(x) = \left(\frac{3-x}{x-5}\right)^2 \quad .68$$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 \quad .67$$

$$f(x) = \frac{1}{5x} - \frac{1}{10x^2} \quad .70$$

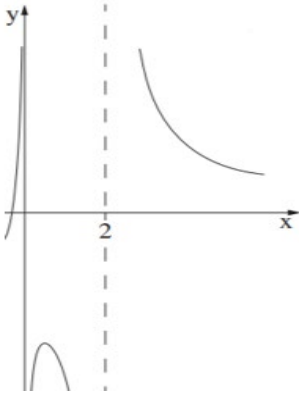
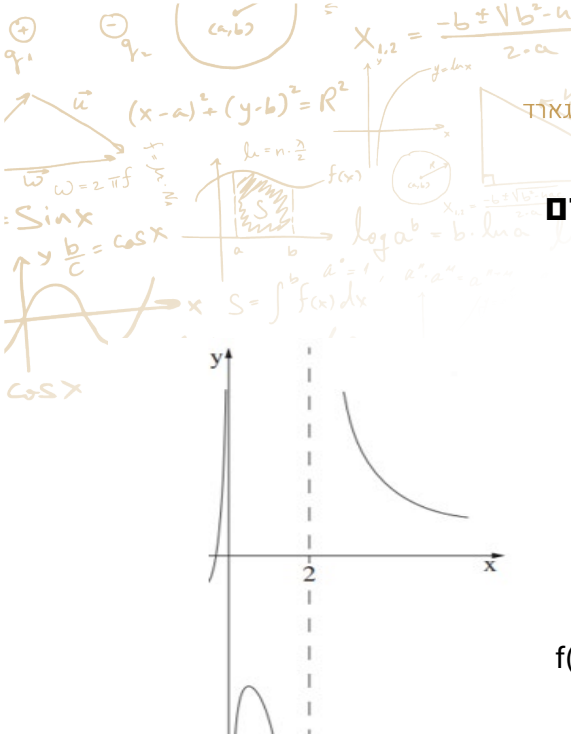
$$f(x) = 4 - \frac{2}{4x-x^2} \quad .69$$

$$f(x) = \frac{4-x^2}{(x-1)^2} \quad .72$$

$$f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} + 1 \quad .71$$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

## פונקציה רציונלית - תרגילי סיכום



73. נתונה פונקציה  $f(x) = \frac{4x+1}{ax^2-2x}$ , פרמטר  $a$

הגרף שלפניכם מתאר את גרף הפונקציה  $f(x)$

א. מצאו את הפרמטר  $a$

הציבו  $a=1$  וענו על הסעיפים הבאים

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$

(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$

(3) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$

ג. שרטטו את גרף הפונקציה של  $f'(x)$

ד. רשמו נקודה בה הפונקציה  $f(x)$  חיובית

74. נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = \frac{x-4}{A} + \frac{2}{x}$

ידוע שלפונקציה  $f(x)$  יש משיק בנקודה  $x=2$  ששיפועו  $-\frac{3}{8}$

א. מצאו את הפרמטר

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצאו נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגה.

(3) רשמו נקודה שבה הפונקציה  $f(x)$  עולה.

(4) שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$

ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $x=4$ .

75. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x^2-mx+n}$ ,  $m$  ו- $n$  פרמטרים

לפונקציה יש אסימפטוטות ב- $x=4$  וב- $x=1$

א. מצאו את הפרמטרים  $m$  ו- $n$

הציבו  $m=5$  ו- $n=4$  וענו על הסעיפים הבאים

ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$

ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה

ד. רשמו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $f(x)$

ה. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$

נתון הישר  $y=k$

ו. עבור אילו ערכי  $k$  חותך הישר את הפונקציה  $f(x)$  בנקודה אחת

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

76. נתונות הפונקציות  $f(x) = 4 - \frac{1}{ax-x^2}$ ,  $g(x) = -x^2 + ax$ , פרמטר a

המשיקים לפונקציות f(x) ו-g(x) בנקודה, שבה x=2 מקבילים.

a. מצאו את הפרמטר a

הציבו a=4 וענו על הסעיפים הבאים

b. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f(x)

(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה f(x)

(3) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה f(x)

c. שרטטו את גרף הפונקציה של f(x)

d. רשמו נקודה בה הפונקציה f(x) חיובית

77. נתונה הפונקציה  $f(x) = k - \frac{x+5}{a-x^2}$ , a ו-k פרמטרים

לפונקציה יש אסימפטוטות ב-x=2 וב-y=2

a. מצאו את הפרמטרים a ו-k

הציבו a=4 ו-y=2 וענו על הסעיפים הבאים

b. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f(x)

(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה f(x) וקבעו את סוגה (דייקו 2 ספרות אחרי

הנקודה)

(3) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה f(x)

ג. שרטטו את גרף הפונקציה של f(x)

נתונה פונקציה נוספת  $g(x) = f(x) - 2$

d. מבלי לעשות חישובים נוספים קבעו כמה נקודות חיתוך יש לגרף של הפונקציה g(x) עם

ציר ה-x

78. נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-3} - \frac{3}{x-1}$ , פרמטר a

הפונקציה חותכת את ציר ה-y בנקודה של לפונקציה  $y = x^2 - 2$  יש נקודת קיצון

a. מצאו את הפרמטר a

הציבו a=3 וענו על הסעיפים הבאים

b. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f(x)

(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה f(x)

(3) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה f(x)

ג. שרטטו את גרף הפונקציה הנגזרת f'(x)

ד. רשמו נקודה בה הפונקציה f(x) חיובית

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

79. נתונה ה נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2+2x+16}{2bx^2-8x+16}$  ו- $k$  פרמטרים

לפונקציה יש אסימפטוטה ב- $y = -1$

א. הוכיחו ש- $a = -2b$

נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא:  $x < 4$  או  $x > 4$

ב. מצאו את ערכם של הפרמטרים  $a$  ו- $b$

הציבו  $a = -1$  ו- $b = 0.5$  וענו על הסעיפים הבאים

ג. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$

(2) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגה

(3) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$

ד. שרטטו את גרף הפונקציה של  $f(x)$

נתונה פונקציה נוספת  $g(x) = -f(x) - 2$

ה. מבלי לעשות חישובים נוספים קבעו כמה נקודות חיתוך יש לגרף של הפונקציה  $g(x)$  עם

ציר ה- $x$  ורשמו את שעורי נקודת הקיצון של הפונקציה

80. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+a}{x^2+3a^2}$

בעבור  $a < 0$  ענו על הסעיפים הבאים (ניתן להביע את התשובות בעזרת  $a$ )

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$

ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה

ג. רשמו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $f(x)$

ד. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$

81. נתונה הפונקציה  $f(x) = 4 - \frac{2}{4x-x^2}$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$

i. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים

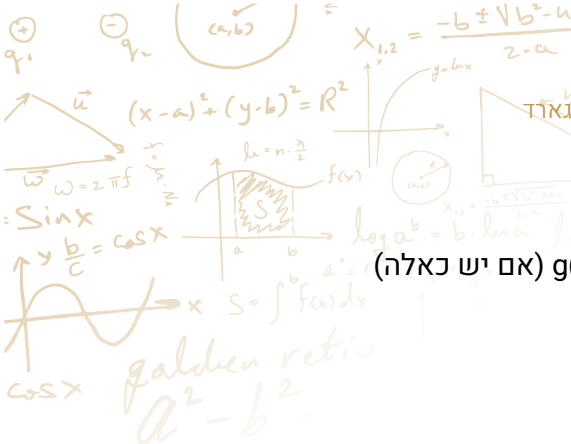
ii. מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

iii. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. נתונה הפונקציה  $g(x)$  המקיימת  $g(x) = f(x) - 2$

הסתמכו על סעיף א' וענו על הסעיפים הבאים:

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד



- (1) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים.
- (2) מה הם השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה).
- (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

82. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$
- (2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים
- (3) מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) + 3$  המקיימת על סעיף א' וענו על הסעיפים הבאים:

- ב. (1) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים.
- (2) מה הם השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה).
- (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

83. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x+4}{x^2} + 1$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים.
- (3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
- (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $g(x)$ .



לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאון

$$84. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{-6(x-1)}{x^2} + 1.5$$

a. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

i. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים.

ii. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

iv. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

$$\text{נתונה פונקציה נוספת המקיימת: } g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

b. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $g(x)$ .

85. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  שונה מ-1.

$$\text{נתון פונקציית הנגזרת של } f(x) \text{ היא: } f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}$$

הישר  $y=2.5$  משיק לגרף הפונקציה בנקודת המינימום שלה.

א. מצאו את שעורי נקודות המינימום של הפונקציה

ב. מצאו את הפונקציה  $f(x)$  ואת שיעורים של נקודות המקסימום שלה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. העיברו משיקים לפונקציה בנקודות הקיצון של הפונרציה. שני המשיקים יוצרים מלבן עם ציר

$y$ - ועם האסימפטוטה אנכית של הפונקציה, מצאו את שטח המלבן.

$$86. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2}$$

הישר  $y=3$  משיק לגרף הפונקציה בנקודת המינימום שלה.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

i. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ii. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

iii. מצאו את סימן פונקציית הנגזרת בתחום  $x < 5$

ב. מצאו את סימן פונקציית הנגזרת בתחום  $x > 5$

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. העיברו משיק לפונקציה בנקודה שבה  $x=4$ . מצאו את נקודות החיתוך של המשיק עם

האסימפטוטות של הפונקציה.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

$$87. \text{ נתונה פונקציית הנגזרת } f'(x) = 1.5x^2 - \frac{48}{x^3}$$

- א. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.  
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  הוא 10.  
 ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה  $f(x)$ ,  
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ה. האם יש לפונקציית הנגזרת נקודת קיצון? נמקד

$$88. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x^2-4}{2x-1}$$

- א. חקרו את הפונקציה הבאה לפי הסעיפים הבאים:  
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים) אם יש כאלה.  
 (3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה) אם יש כאלה.  
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 לפניך סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום הגדרתה.  
 ב. עבור אילו ערכים של  $k$  הישר  $y=k$  אינו חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ ? נמקד

$$89. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x-a}{2x-4} \text{ a שונה מ-2}$$

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה, המקבילות לצירים.  
 ג. הביעו באמצעות  $a$  את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם צירים.  
 ד. מצאו לאילו ערכי  $a$  הפונקציה יורדת לכל  $x$  תחום הגדרה.  
 ה. יש, המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x=a$  מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקושה שבה  $x=3$  מצאו את ערך של  $a$  אם נתון שהפונקציה יורדת לכל  $x$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

90. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2+2x+16}{bx^2-6x+9} + k$  ו- $a$  ו- $b$  הם פרמטרים

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא  $x < 3$  או  $x > 3$ .

לפונקציה אסימפטוטה ב- $y = a$

א. מצאו את הפרמטרים  $b$  ו- $k$

הציבו  $b = 1$  ו- $k = 0$  וענו על הסעיפים הבאים

ב. מהי אסימפטוטה המקבילה לציר  $x$  (בתשובתכם העזרו ב- $a$ )

הפונקציה והאסימפטוטה המקבילה לציר  $y$  נחתכות בנקודה הנמצאת על ציר ה- $y$ .

ג. מצאו את הפרמטר  $a$

ד. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה, אם יש כאלה. ואת תחומי העלייה והירידה.

ה. סרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$

91. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x-6}$

א. חקרו את הפונקציה  $f(x)$  לפי הסעיפים הבאים:

i. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

iii. מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את

סוגן.

iv. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. קבע אם נקודה ששיעור ה- $y$  שלה הוא 5- נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$ . נמקו

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

92. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{b}{x+3} + \frac{5}{x-1}$  פרמטר  $b$

נתון ששיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x=3$  הוא  $-\frac{4}{3}$

א. מצאו את הפרמטר

הציבו  $b=3$  וענו על הסעיפים הבאים:

ב. חקרו את הפונקציה  $f(x)$  לפי הסעיפים הבאים:

- (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (4) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

93. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{x^2 - a^2}$

נתון ששיעור  $y$  של נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$  הוא  $-1$

א. מצאו את  $a$

הציבו את  $a = 1$

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$

- (2) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגה
- (3) מצאו את האסימפטוטות לפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים
- (4) הראו שהפונקציה  $f(x)$  היא אי זוגית
- (5) שרטטו את הפונקציה  $f(x)$

נתונה הפונקציה  $g(x) = |f(x)|$  המקיימת

ג. שרטטו את הגרף של  $g(x)$

נתונה הפונקציה  $g(x)$  המקיימת  $h(x) = f(x) + k$

ד. קבעו עבור אילו ערכים של  $k$  לגרף הפונקציה  $h(x)$  יש 2 או 3 נקודות חיתוך

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

94. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2ax^2}{x^2 - b^2}$

המרחק בין האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה הוא 4 ונתון שאסימפטוטה האופקית היא  $y = -1$

א. מצאו את  $a$  ו- $b$

הציבו את  $a = -\frac{1}{2}$  ו- $b = 2$

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$

(2) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגה

(3) מצאו את האסימפטוטות לפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים

(4) הראו שהפונקציה  $f(x)$  היא זוגית

(5) שרטטו את הפונקציה  $f(x)$

ג. שרטטו את הגרף של  $f'(x)$

נתונה הפונקציה  $g(x)$  המקיימת  $h(x) = (f(x))^2$

ד. שרטטו את הגרף של הפונקציה וקבעו האם  $h(x)$  זוגית או אי זוגית

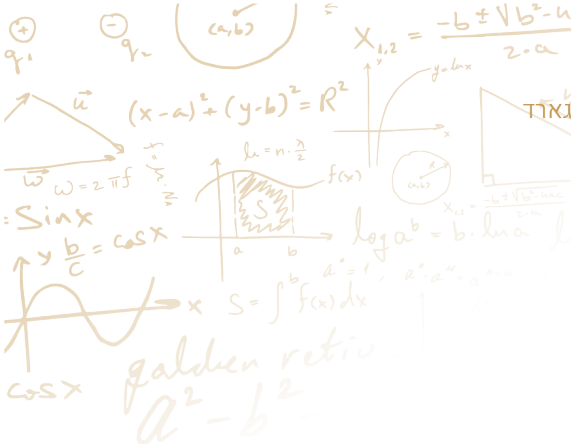
95. נתונה הפונקציה  $f(x)$

ידוע שהפונקציה  $f(x)$  מוגדרת ב- $x > 2$  או  $-2 < x < 2$  או  $x < -2$

לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית ב- $y = 1$ ,

נקודת מקסימום ב- $(0,0)$  והיא עולה בתחום  $x < -2$  ויורדת בתחום  $x > 2$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד



א. שרטטו את גרף הפונקציה

ב. נתון הישר  $y=k$

(1) עבור אילו ערכי  $k$  הישר חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  ב-2 נקודות

(2) עבור אילו ערכי  $k$  הישר חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  לפחות נקודה אחת

(3) עבור אילו ערכי  $k$  הישר חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  באף נקודה

ג. כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = 3$

ד. נתונה הפונקציה  $g(x) = -2 \cdot f(x)$

מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  וקבעו את סוגן

ה. נתונה הפונקציה  $h(x) = f(x - 2)$

מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$  ואת האסימפטוטות המקבילות לציר ה- $y$

ו. נתונה הפונקציה  $s(x) = f(x) + 3$

מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $s(x)$

ז. נתונה הפונקציה  $r(x) = (f(x))^2$

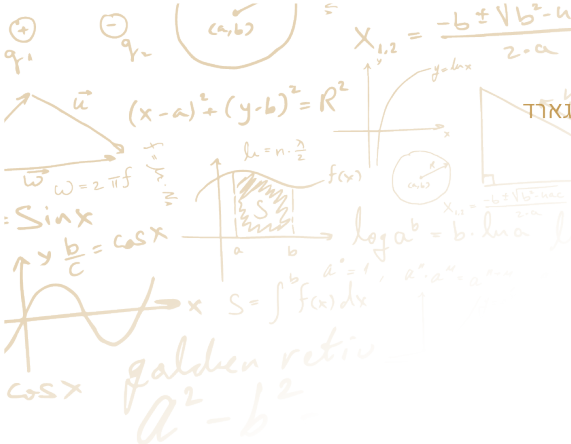
מצאו את נקודות הקיצון (כולל סוג) ומצאו את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $r(x)$

ח. נתונה הפונקציה:  $w(x) = f(x + 2c)$ , לפונקציה  $w(x)$  יש נקודת קיצון ב- $x=7$

מצאו את  $c$

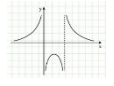
### פתרונות - תרגילים 93-73

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח"ל  
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

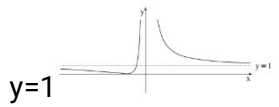


- .74
- .75
- .76
- .77
- .78
- .79
- .80

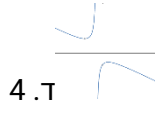
81. פתרון: א. 1.  $x \neq 0, 4$  2.  $x=0, x=4, y=0$  3. (0.5, -8) מקסימום.



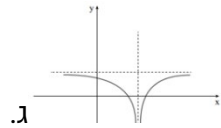
82. פתרון: א. 1.  $x \neq 0, 1$  2.  $x=0, x=1, y=0$  3. (0.5, -8) מקסימום. 4.  
83. פתרון: א.  $x \neq 0$  ב.  $y=1, x=0$  ג.  $(-2, 0), (3, 0), (1, 0)$  ג. עולה  $-2 < x < 0$  יורדת  $x < -2$



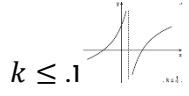
84. פתרון א.  $x \neq 0$  ב.  $y=1.5, x=0$  ג.  $(2, 0)$  ד. יורדת  $0 < x < 2$  עולה  $x > 2, x < 0$  ו.  $X=2$   
 $y=2/3$



85. פתרון א.  $(-3, 2.5)$  ב.  $y = -\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2}x$  ג. 4. ד.  
86. פתרון: א.  $x \neq 5$  2.  $X=5, y=1$  3.  $(0, 0.96), (4, 0), (6, 0)$  4.  $X < 5$  שלילי,  $X > 5$  חיובי ב.



87. תשובה: א. מינימום ב-  $x=2$  . ב.  $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{24}{x^2}$  ג.  $x=0.1$  ד. ה. כן



88. פתרון: א.  $x \neq 0.5$  ב.  $x=0.5, x=2, (-2, 0), (2, 0), (0, 4)$  ד.  $x \neq 0.5$  עולה ה.  $k \leq 0$   
0.5 נתונה

89. תשובה: א.  $x \neq 2$  ב.  $x=2, y=1/2$  ג.  $(a, 0), (0, a/2)$  ד. 1.  $A < 2$  2.  $a=1$   
90.



91. פתרון: א.  $x \neq 3, x \neq 6$  ב.  $X=3, x=6, y=0$  ג.  $(4, 3), (2, 0), (0, 1/3)$  ד. ה.  
92. פתרון א.  $b=3$  ב.  $x \neq -3, x \neq 1$  ג.  $X=-3, x=1, y=0$  ד. יורדת בכל תחום הגדרת ה.  $(-9, 0)$  ו.  $(0, 8)$   
93. פתרון: א.  $b=4, a=-1$  ב.  $x=1$  ג.  $\min(4, -4/3)$  1 יח"ר