



שעורים וקורסי לימוד במתמטיקה ופיזיקה לתלמידי חטיבה תיכון, והכנה לבגרות - התמחות ב-5 יח"ל
"תמציתה של המתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - סר גאדר

כיתה ט - יחידה 23 - בעיות קיצון - בעיות גאומטריות

מבוא - בעיות ערך קיצון

למעשה הנושא של בעיות ערך קיצון עונה על השאלה, למה אנחנו לומדים חשבון דיפרנציאלי, לגזור ולחקור פונקציות. הוא נותן קשר בין עולם המתמטיקה שנראה כל כך רחוק מעולמנו לפעמים. החשבון הדיפרנציאלי הוא כלי חזק ביותר לפתור לנו בעיות מתחומי היום יום.

ברוב התחומים אנו מנסים למקסם תוצאות או לדאוג שהיו הקטנות ביותר, לדוגמא בעת בניית בית חדש אנו רוצים לנצל את החומרים שקנינו כך שנקבל בית עם שטח הגדול ביותר.

דוגמא נוספת האם למכור הרבה מוצרים בזול או מעט במחיר יקר.

נושא זה הוא החשוב ביותר בשאלון זה והוא למעשה מסכם את כל שאר הנושאים.

פתרון בעיות ערך קיצון יש לעבור חמישה שלבים:

שלב ראשון - הבנת הנקרא

קריאת הבעיה במלואה לפחות פעמים - ולהבין את אוסף האינסוף המקרים של התרגיל

שלב שני - הגדרת משתנה והבעת שאר החלקים

סימון אחד משתני הבעיה למשל x , t או כל אות אחרת, ולאחר מכן להביע באמצעות משתנה זה את כל שאר אורך הצלעות, זוויות, הוא הדברים שלא נתונים בשאלה הבעיה.

שלב שלישי - בניית פונקציית המטרה

על פי המבוקש בשאלה (שטח מקסימלי, היקף מינימלי, סכום שטחים וכדומה) יש לרשום ביטוי

מתמטי בעזרת המשתנה שהוגדר

*חשוב מאוד להבין את התחום ההגדרה של פונקציית המטרה

שלב רביעי - מציאת קודקוד

כעת, הביטויים שהתקבלו לפונקציית המטרה היו רבועים נוכל בעזרת מציאת הקודקוד של הפונקציה, למצוא מתי הביטוי הוא מינימלי או מקסימלי.

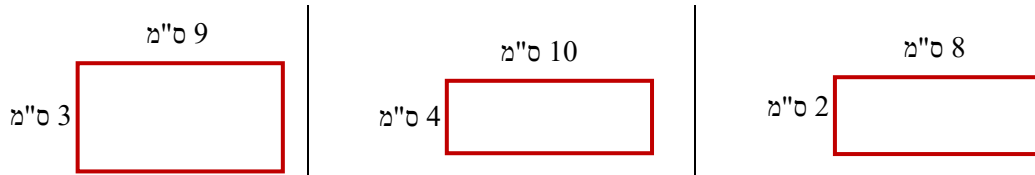
שלב חמישי - ניתוח התוצאות ובדיקת נקודות קצה התחום.

חישוב הערכים המבוקשים תוך התייחסות לנקודות קצה הבעיה,

בעיות קיצון - בעיות גיאומטריות - תרגול

1. נתון שהיקפו 24 ס"מ.

א. איזה מאורכים הבאים יכול להתאים למלבן?



נסמן אורך צלע אחת של המלבן ב-x.



מצאו את שטח של המלבן בעל השטח הכי גדול בעזרת הסעיפים הבאים

(1) איזה מהביטויים הבאים מייצג את אורך הצלע השנייה של המלבן?

$$24 - 2x \quad | \quad 12 - x \quad | \quad 24 - x$$

(2) איזה מהביטויים הבאים מייצג את שטח המלבן (פונקציית המטרה)?

$$s(x) = 24 - 2x \quad | \quad s(x) = 24x - x^2 \quad | \quad s(x) = 12x - x^2$$

התקבלה פונקציה שמייצגת את שטח המלבן.

נסה למצוא את שיעור ה-x שבו הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי

(3) מצאו את הערך של x בעברו מתקבל שטח מלבן מקסימלי (שיעור ה-x של נקודת הקודקוד)

(4) מה השטח המקסימלי של המלבן?



2. נתון משולש ישר זווית אורכי סוכם ניצב הם 14 ס"מ
מצאו את אורכי הניצבים של המשולש בעל השטח המקסימלי בעזרת
הסעיפים הבאים:

נסמן אורך אחד הניצבים של המשולש ב-x.

א. איזה מהביטויים הבאים מייצג את אורך הניצב השני של המשולש?

$14 - 2x$	$7 - x$	$14 - x$
-----------	---------	----------

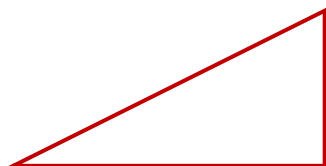
ב. איזה מהביטויים הבאים מייצג את שטח המשולש (פונקציית המטרה)?

$s(x) = 14 - 2x$	$s(x) = 14x - x^2$	$s(x) = 14 - x$
------------------	--------------------	-----------------

התקבלה פונקציה שמייצגת את שטח המשולש.

ננסה למצוא את שיעור ה-x שבו הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי (בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת)

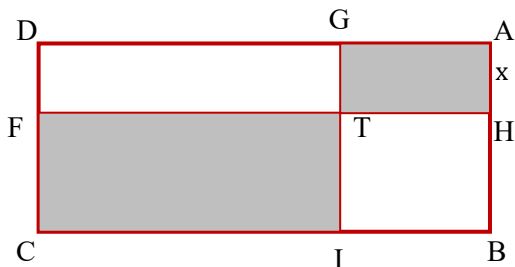
ג. מצאו את הערך של x בעברו מתקבל שטח משולש מקסימלי



3. ידוע, שסכום אורכי ניצבו של ישר זווית הוא 20 ס"מ.

א. מצא את השטח המקסימלי של המשולש.

ב. מהו סוגו של המשולש בעל השטח המקסימלי



4. נתון מלבן ABCD שממדיו הם: 16 ס"מ ו-6 ס"מ.

חלקו את המלבן ל-4 מלבנים כמתואר.

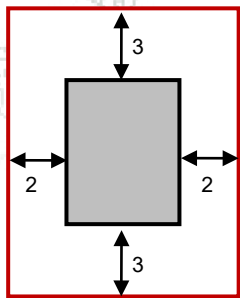
ידוע ש- $AG=2AH$.

סמנו את ב-x את אורך הקטע AH.

מה צריך להיות אורכו של הקטע AH על מנת

שסכום שטחי של המלבנים AHTG ו-FTIC יהיה

מקסימלי



5. בתוך מלבן, היקפו 96 ס"מ, סרטטו מלבן נוסף כמתואר בשרטוט.

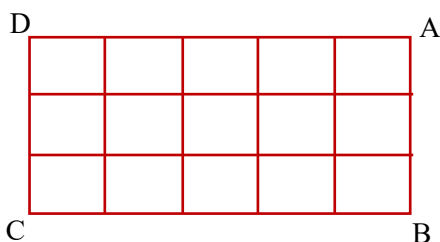
סמנו את אורך של אחת הצלעות של המלבן החיצוני ב-x

א. הביעו את שטח המלבן הפנימי ב-x

ב. מצאו, מה צריכים להיות אורכי הצלעות של המלבן החיצוני, כדי

ששטח המלבן הפנימי יהיה מקסימלי.

ג. מצאו את השטח הלבן המינימלי (השטח בין ההקיף החיצוני לפנימי)



6. מחוט תיל, שאורכו 96 ס"מ, בנו רשת בצורה מלבנית.

של 6 קטעים אנכים ו-4 קטעים אופקיים.

סמנו ב-x את אורך AB

א. הביעו את שטח הרשת בעזרת x

ב. מה הוא שטח הרשת המקסימלי של הרשת

7. נתון מלבן ABCD, שהיקפו 100 ס"מ.

במלבן חסמו 2 משולשים ישרי זווית FKP ו-HKG כמתואר.

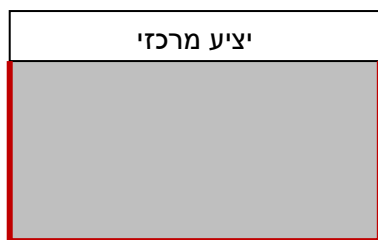
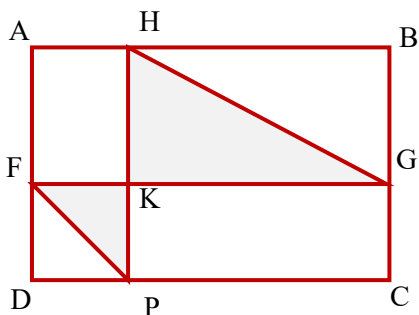
$$FK = KP = \frac{1}{3}KG$$

נסמן את הצלע FK ב-x

א. הביעו בעזרת x את סכום שטחי המשולשים FKP ו-HKG

ב. מצאו את אורך צלע FK, עבורו סכום שטחי המשולשים הוא

מינימלי



8. מגרש כדורגל בצורה מלבנית, מסביב למגרש כדורגל (3 מצלעותיו)

בנו גדר שאורכה 220 ס"מ, ועל צלע אחת יש יציע מרכזי.

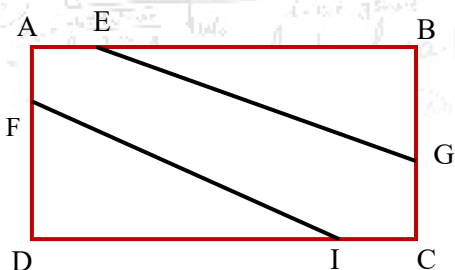
א. חשבו מה צריכים להיות ממדיו של המגרש, על מנת

שאורך הגדר יהיה מקסימלי.

ב. מהי צורת המגרש, כאשר אורך הגדר מקסימלי הוא

מקסימלי?

9. נתון, היקף המלבן הוא 120 ס"מ.



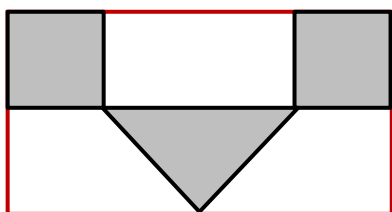
בנוסף נתון, ש- $IC = AF + 2$ ו- $AF = AE$, $CG = CI$,
נסמן את AF ב- x ,

א. הביעו את שטח המשושה FAEGCI בעזרת x .

ב. מצאו את ערכו של x , כאשר מתקבל שהשטח של

המשושה FAEGCI מקסמלי

10. נתון, היקף המלבן הוא 98 ס"מ.



גוזרים מתוך שטח המלבן שני ריבועים ומשולש כמתואר בציור.

נתון, שאורך צלע הריבוע הוא 3 ס"מ.

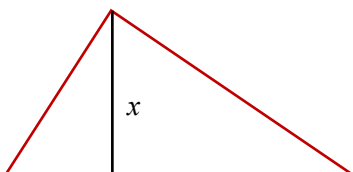
א. מצאו, מה צריכים להיות ממדיו של המלבן, כך שהשטח,

שנגזור, יהיה מקסימלי,

ב. מצא את שטח הגזור המינימלי

11. נתון משולש שהסכום של גובהו ובסיסו הוא 20.

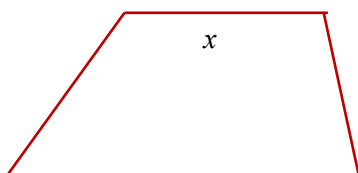
מצאו גבהו של המשולש בעל השטח המקסימלי



12. נתון טרפז שאורך גבהו גדול ב-2 ס"מ מאורך בסיסו הקטן, וקטן ב-

3 ס"מ מאורך הבסיס הגדול.

מצאו את שטחו של הטרפז המקסימלי





13. נתונים ריבוע, משולש שווה צלעות ומעגל

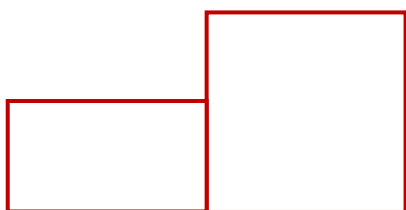
אורך רדיוס של המעגל קטן ב-2 ס"מ מאורך צלע

המשולש וקטן ב-2 ס"מ מאורך צלע הריבוע.

נסמן ב-x את אורך הרדיוס של המעגל.

א. הביעו את שטחי המעגל, המשולש והריבוע

ב. מצאו את אורך רדיוס המעגל כך ששטחי הריבוע המשולש ומעגל יהיה מנימלי



14. נתון ריבוע ומלבן שאחת הצלעות שלו קטנה ב-4 ס"מ מאורך

צלע הריבוע ואורך הצלע השנייה גדולה ב-20% מאורך צלע

הריבוע.

מה צריכה להיות צלע הריבוע על מנת שסכום השטחים של

המלבן והריבוע יהיה מקסימלי

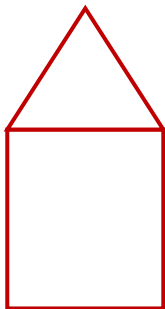
15. היקף מעוין הוא 98 סמ"ר.

א. חשבו, מה צריכים להיות אורכי אלכסונו, על מנת שסכומם יהיה

מינימלי.

ב. מהו היקפו של המעוין, שסכום אלכסונו הוא מינימלי.

ג. איזו צורה התקבלה?



16. נתון, מלבן שעל אחת צלעותיו בנו משולש שווה צלעות, כמתואר בציור.

היקף כל הצורה החדשה הוא 75 ס"מ.

א. מצאו את אורכה של צלע המשולש, כך ששטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מהו השטח של הצורה (כולל המשולש), כאשר ידוע, ששטח המלבן מקסימלי?



17. נתון שלד של מבנה שבסיסו מלבן שאורך המקצוע אחת שלו הוא 8 מטר.

אורך כל מקצועות של השלד ו-2 קורות בבסיס העליון שלה נחתכו מקורת

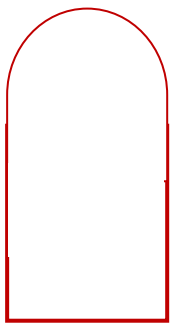
מתכת ארוכה 192 מטר.

סמנו ב-x את מקצוע הבסיס הקצר

א. הביעו בעזרת x את אורך גובה התיבה

ב. הביעו את נפח התיבה בעזרת x.

ג. מצאו מה צריך להיות x על מנת שנפח הבניין יהיה ממקסימלי



18. נתון חלון שהיקפו 178.5 ס"מ. החלון בנוי במלבן וחצי מעגל כמתואר

באיור.

א. נסמן את רדיוס החצי מעגל ב-x והביעו באמצעות x את שטחו של

החלון.

ב. מצאו את ממדי המלבן כך ששטח החלון שהתקבל יהיה מקסימלי

(השתמשו ב- $\pi = 3.14$)

19. לבניית בית בצורת תיבה שבסיסו ריבוע דרושים כמה חומרים.

חומר א' לבניית הקירות הצדדים בעלות 120 מ"ר

חומר ב' לבניית הריצפה בעלות 180 מ"ר

חומר ג' לבניית התקרה בעלות 200 מ"ר

התקציב לבית הוא 20,000 ₪, סמן את צלע בסיס הבית ב-x

א. הבע את גובה הבית ב-x.

ב. מצאו את גובה הבית בעל הנפח המקסימאלי.

פתרונות

1.

2.

3. א. $s(x) = 320x - 10x^2$, ב. 16 ס"מ ג. 7168 שקל

4. א. $S(3,0)$, $R(-3,0)$ ב. $R(1,8)$ ג. 32 יח"ר

5. א. 12, 8 ב. 72 יח"ר

6. א. 9, 15 ב. 135 יח"ר

7.

8.

9. א. 7, 14 ב. 34 יח"ר

10. א. 5, 5, 5 ב. 60 יח"ר ג. קוביה

שעורים וקורסי לימוד במתמטיקה ופיזיקה לתלמידי חטיבה תיכון, והכנה לבגרות - **התמחות ב-5 יח"ל**
"תמציתה של המתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - סר גאדר

11. א. 14, 14 ב. 39.6 יח"ר, ג. ריבוע

12. א. 12.5 יח"א ב. 369.7 יח"ר

.13

.14

.15

.16

.17

.18

"השלמות האמיתית של האדם אינה טמונה במה שיש לו - אלא במה שהינו" - **אוסקר ווילד**

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

לקביעת שיעור - 054-2204765  www.guykoren.co.il ת"א ורמת השרון (סניף ראשי, סשה ארגוב 15)



שעורים וקורסי לימוד במתמטיקה ופיזיקה לתלמידי חטיבה תיכון, והכנה לבגרות - התמחות ב-5 יח"ל
"תמציתה של המתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - סר גאדר

בעיות קיצון - מספרים

נתונים שלושה מספרים, שסכומם 39. ידוע, שאחד המספרים גדול מאחר פי 3.

מצאו את המספרים, שסכום ריבועים הוא מינימלי.

פתרון

שלב ראשון: נסמן אחד המספרים ב- x , מספר שני ב- $3x$, ואת השלישי ב- $39-4x$.

שלב שני: נבנה את הפונקציה של סכום הריבועים:

$$f(x) = x^2 + (3x)^2 + (39 - 4x)^2$$

לאחר פתיחת סוגרים וכינוס איברים דומים נקבל

$$f(x) = 26x^2 - 312x + 1521$$

שלב שלישי: נגזור את הפונקציה

$$f'(x) = 52x - 312$$

ונשווה לאפס

$$0 = 52x - 312$$

לאחר בדיקה נקבל, שאנו מקבלים מינימום ב- $x=6$.

שלב רביעי: נציב ונקבל את שלושת המספרים:

מס' הראשון הוא 6, המס' השני 18 והשלישי 15.

1. הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 18.

המספר השני גדול פי 2 מהמספר הראשון.

סמנו ב- x את המספר הראשון,

א. הביעו באמצעותו את המספר השלישי

ב. מצא את הערך של x , שעבורו מכפלת שלושת המספרים, תהיה מקסימלית.

2. הוכיחו שסכום מספר וריבועו גדול או שווה ל- $\frac{1}{4}$.

שעורים וקורסי לימוד במתמטיקה ופיזיקה לתלמידי חטיבה תיכון, והכנה לבגרות - התמחות ב-5 יח"ל
"תמציתה של המתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - סר גאדר

3. מבין כל המספרים החיוביים X ו-Y, המקיימים $2x + y = 7$, מצאו את שני המספרים, שמכפלתם מינימלית.
מצאו את ההמכפלה המינימלית.

4. מבין כל המספרים החיוביים X ו-Y, המקיימים $y(x + 2) = 9$, מצאו את שני המספרים, שסכומם מינימלי.
מצא את הסכום המינימלי.

5. נתונים שלושה מספרים, שמכפלתם 120. ידוע, שהראשון גדול פי 5 מהשני.
א. מצא את סכום שלושת המספרים המינימלי.
ב. הסבר מדוע, אין סכום מקסימלי סופי.

6. ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצא את הסכום המינימלי של מספר וההופכי לו.
ב. מצא את המספר, שאם נחסיר ממנו את שורשו, יתקבל הפרש מינימלי.

7. נתונים שלושה מספרים חיוביים, שסכומם 13. הראשון גדול מהשני פי 3.
א. מצאו את שלושת המספרים, שסכום ריבועם הוא מינימלי.
ב. מצאו את סכום הריבועם המינימלי.

8. נתונים שני מספרים, שסכומם 24.
א. מצאו את שני המספרים, שמכפלת האחד בריבועו של השני, תהייה מקסימלית.
ב. מצאו את שני המספרים, שסכום ריבועם הוא מינימלי.

שעורים וקורסי לימוד במתמטיקה ופיזיקה לתלמידי חטיבה תיכון, והכנה לבגרות - התמחות ב-5 יח"ל
"תמציתה של המתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - סר גאדר

9. נתונים שלושה מספרים חיובים, שסכומם m . הראשון גדול מהשני פי 2.

א. מצאו את שלושת המספרים, שמכפלתם מינימלית.

ב. מצאו את המכפלה המינימלית.

10. מבין כל שני מספרים החיובים, המקיימים $\frac{1}{x} = 25y$.

מצאו את שני המספרים, שסכומם מינימאלי.

"לעולם לא יאכל אדם, אלא כשהוא רעב; ולא ישתה, אלא כשהוא צמא" - הרמב"ם

11. א. $2X, 18-3X, X$. ב. $8, 6, 4$.

12.

13. א. $3\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}$. ב. $6\frac{1}{8}$.

14. א. $1, 3$. ב. 4 .

15. א. 18 . ב. ככל שלוקחים את המספר הראשון, קטן יותר הסכום גדל.

16. א. 2 . ב. $\frac{1}{4}$.

17. א. $5, 6, 2$. ב. 65 .

18. א. $8, 16$. ב. $12, 12$.

19. א. $\frac{4m}{9}, \frac{2m}{9}, \frac{3m}{9}$. ב. $\frac{8m}{243}$.

20. א. $13, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$.