

הנהגות

חקירת פונקציית פולינום

- 1..... פולינום – מציאת נקודות קיצון ופיתול <
- 5..... פולינום - חקירת פונקציית <
- 10..... תרגול - חקירת פונקציה – פולינום <
- 15..... פולינום – חקירת פונקציה בתחום סגור – קיצון קצה ומוחלט <
- 17..... חקירה מלאה (פרמטר שנשאר) <
- 20..... חקירת פונקציית פולינום – סיכום <

פולינום – מציאת נקודות קיצון ופיתול

נקודות קיצון

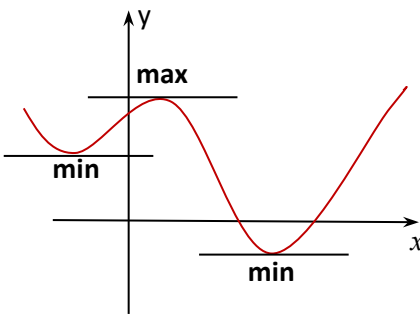
נקודות קיצון (מינימום ומקסימום) הן נקודות שבהן **שיפוע המשיק** לפונקציה מקביל לציר ה-x, ולכן שיפועו **אפס**.

כמו שאנו כבר יודעים, **שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שווה לערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה**, לכן על מנת למצוא את נקודות הקיצון משווים את הנגזרת לאפס.

מהמשוואה שהתקבלה, נקבל את שעורי ה-x, ואז נציב בפונקציה את שיעור ה-x שקיבלנו, ונקבל את ערך ה-y בנקודה.

כדי לגלות את סוג הקיצון (min, max) נצטרך למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה או להיעזר בנגזרת השנייה.

*קיימות נקודות על הפונקציה ששיפוע המשיק הוא אפס אבל הן לא נקודות קיצון אלה נקודות פיתול.



תחומי עלייה וירידה

ניתן לשים לב שבין נקודות הקיצון הפונקציה נמצאת או עולה או יורדת.

נזכור כי שיפוע הפונקציה בכל נקודה שווה לערך הנגזרת שלה בנקודה זו, ומכאן נוכל לנסח כלל שיבדוק אם בנקודה מסוימת הפונקציה עולה או יורדת.

כאשר הערך **שלילי** הפונקציה בנקודה **יורדת**,

כאשר הערך **חיובי** הפונקציה בנקודה **עולה**

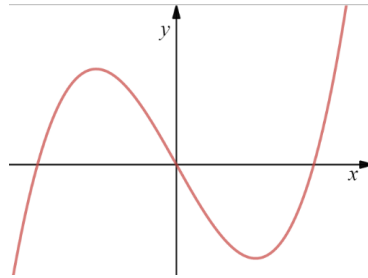
הבדיקה נעשית ע"י הצבה של שיעור ה-x של אחת הנקודות מכל תחום שבין נקודות הקיצון (או נקודות אי הגדרה)

1

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

נקודות קיצון – תרגול

1. נתון הגרף של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$



- א. העבירו משיקים לפונקציה בנקודות שבהן הגרף עובר מעלייה לירידה ולהיפך.
 ב. מה ניתן לומר על שיפוע המשיקים בנקודות אלו?
 ג. מה ההגדרה של הנגזרת של פונקציה?
 ד. גזרו את הפונקציה ועל פי סעיפים א ו-ב מצאו את הנקודות שבהן יש שינוי מעלייה לירידה ולהיפך.
 ה. על פי הגרף קבעו את הסוג (מינימום/מקסימום) של הנקודות שמצאתן בסעיף הקודם.
 ו. על פי סעיפים א-ה, רשמו את השלבים במציאת נקודות המינימום מקסימום של הפונקציה (נקודות הקיצון)

2. מצאו את נקודות הקיצון (מינימום/מקסימום) של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = -x^2 + 7x + 8$ ב. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\frac{1}{2}x - 12$

ג. $f(x) = x^2 + 2x$ ד. $f(x) = -3x^2 + 9x$

ה. $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ ו. $f(x) = x^3 + 3x^2$

ז. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ח. $y = -x^3 - 3x^2 - 3x$

ט. $y = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2$ י. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

יא. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ יב. $f(x) = -3x^2 + x^3$

יג. $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$ יד. $f(x) = \frac{x^3}{6} - 8x$

3. נתון שלפונקציה $f(x) = x^3 - ax^2 - 1$ יש נקודת קיצון בנקודה, שבה $x=2$. מצאו את הפרמטר a

4. נתון שבנקודה שבה $x=-3$ שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2bx^2$ הוא אפס מצאו את הפרמטר b

5. המשיק לפונקציה $f(x) = -ax^4 - (a-1)x^2$ בנקודה שבה $x=-1$ מקביל לישר $y=3$
א. מצאו את הפרמטר a
ב. מצאו את נקודת ההשקה

6. נתון שהפונקציה $f(x) = m^2x^4 + (3m-1)x^2 + 2m$ יורדת עבור $x < 1$ ועולה עבור $x > 1$ מצאו את הפרמטר m

7. נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = \frac{x^3}{3} - Ax^2$. שיפוע המשיק לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x=4$
א. מצאו את A

הציבו $A=$ וענו על הסעיף הבא
ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

8. נתון שלפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{3a} + \frac{1}{2}x^2$ יש נקודת השקה עם ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$

9. נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$ ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(1,2)$, מצא את a ו- b .

10. נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = x^3 - Ax^2 + Bx + 4$.

לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $(3, -5)$

א. מצאו את A ו-B.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה שיעור ה-x הוא 2

11. נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = kx^4 - 4x^2 + 8$.

לפונקציה יש 2 נקודות קיצון הנמצאות על ציר ה-x והמרחק בניהן הוא 4

א. מצאו את k

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן קודקודים של משולש

ב. חשבו את שטח המשולש

12. נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = mx^4 + x^3 - 5x^2 + n$.

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה ששיעור ה-x שלה הוא 2 והיא גם משיה לציר ה-x בנקודה זו

א. מצאו את m ו-n

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. רשמו את הערך הקטן ביותר שמקבלת הפונקציה $f(x)$

13. לפונקציה $g(x) = x^3 + 2ax$ ולפונקציה $f(x) = 1.5x^2 - 2ax - 3.5$ יש נקודת קיצון זהה

א. מצאו את ערכו של a

הציבו את ערכו של a וענו על הסעיפים הבאים

ב. מצאו נקודה על הפונקציה $f(x)$ ששיעורו של המשיק שעובר בה הוא 3

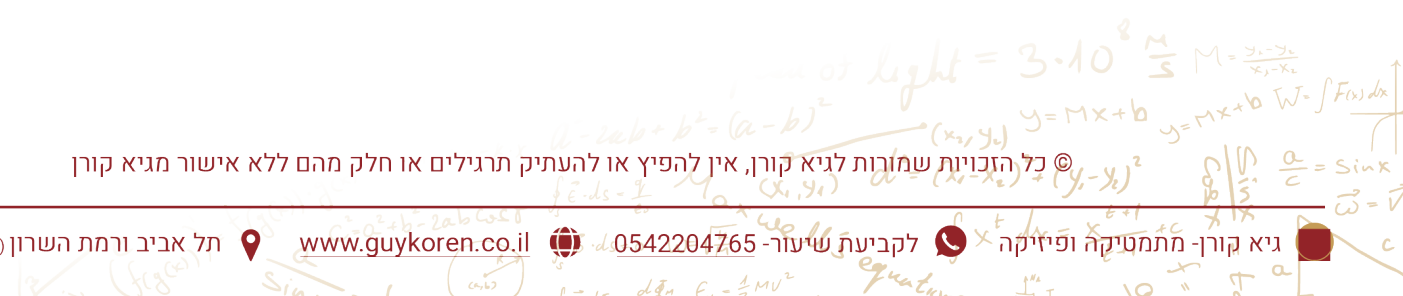
ג. קבעו נכון או לא נכון: $f(-2) > g(-1)$ ונמקו

14. המשיק לפונקציה $f(x) = x^2$ ברביע השני יותר עם הצירים משולש ששטחו 16

מצאו את משוואת המשיק זה

פתרונות

- 1. בקרוב
- 2. בקרוב
- 3. בקרוב
- 4. בקרוב
- 5. בקרוב
- 6. בקרוב
- 7. בקרוב
- 8. בקרוב
- 9. בקרוב
- 10. בקרוב
- 11. בקרוב
- 12. בקרוב
- 13. בקרוב
- 14. בקרוב



פולינום - חקירת פונקציית

על מנת לשרטט גרף של פונקציה לפי הייצוג האלגברי שלה נמצא כמה נקודות ותחומים של הפונקציה, למעשה אנו חוקרים את פונקציה, בעזרת הסעיפים הבאים:

א. תחום ההגדרה של הפונקציה: עבור אילו ערכי X הפונקציה מוגדרת?

ב. מציאת נקודות קיצון (מינימום מקסימום): גזרים את הפונקציה, משווים את הנגזרת לאפס ומתקבל שיעור ה-X של נקודת הקיצון. לאחר מכן מציבים את שיעור ה-X בפונקציה כדי לקבל את ה-Y של נקודת הקיצון (שכמובן נמצאת על הפונקציה!).

ג. תחומי עלייה וירידה: מציבים בנגזרת שמצאנו בסעיף הקודם את שיעורי ה - X של נקודות שנמצאות בין הנקודות החשודות ובודקים את הסימן שיוצא בעזרת טבלה.

ד. מציאת נקודות חיתוך של פונקציה עם הצירים (ציר ה-x וציר ה-y):

- חיתוך עם ציר ה-x, כפי שידוע שיעור ה-y הוא 0 ולכן:
נציב בפונקציה $y=0$ ונוכל למצוא את שיעור ה-x
- חיתוך עם ציר ה-y, כפי שידוע שיעור ה-x הוא 0 ולכן:
נציב בפונקציה $x=0$ ונוכל למצוא את שיעור ה-y

ה. שרטוט: לפי מה הנתונים שמצאנו בסעיפים הקודמים, מסמנים את כל הנקודות במערכת צירים ריקה שמכינים מראש, ומחברים לעקומה.

*כאשר בבדיקה של העלייה והירידה של הפונקציה יוצא שיש עלייה או ירידה בשני תחומים ברצף – זוהי נקודת פיתול
*בחקירת פונקציה בתחום סגור יש לבדוק גם את ערך הפונקציה בקצוות הקטע ואז לקבוע מינימום ומקסימום מוחלטים.

"קל להחטיא את המטרה אולם קשה לקלוע אליה" - אריסטו

דוגמא לחקירה מלאה.

נחקור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

א. תחום הגדרה של הפונקציה:

שלב ראשון של חקירה מתחיל במציאת תחום הגדרה, כאשר ידוע שפונקציית הפולינום מוגדרת **לכל** x או בכתיבה מתמטית $x \in \mathbb{R}$.

ב. מציאת נקודות חשודות (קיצון (min, max) או פיתול)

בנקודות הקיצון (ובחלק נקודות הפיתול) של הפונקציה אנו יודעים ששיפוע המשיק הוא אפס. זכורו,

שיפוע המשיק של הפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודה ולכן

תחילה נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

לאחר מכן נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל את המשוואה הבאה:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

כיוון שאנו לא יודעים לפתור משוואה ממעלה שלישית נוציא גורם משותף מכל האיברים,

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

מכיוון שמדובר כאן במכפלה ששווה לאפס, הרי ששוויון כזה יכול להתקיים רק אם לפחות אחד הכופלים הוא אפס בעצמו.

מכאן ניתן לקבוע כי במקרה אחד $x^2 - 4x + 4 = 0$, ובמקרה אחר $x = 0$.

לאחר שנפתור את המשוואה ריבועית שהתקבלה, נקבל את הפתרונות הבאים: $x = 0$, $x = 2$. נציב את

הפתרונות בפונקציה ונקבל את שיעור ה-y של כל נקודה

$$(0,0), \left(2, 1\frac{1}{3}\right)$$

השלב הבא יהיה לקבוע אם נקודות הקיצון שמצאנו הן נקודות מינימום, מקסימום או פיתול לשם כך,

נצטרך למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. (ניתן לעשות זאת גם ע"י נגזרת שנייה)

ג. מציאת תחומי עלייה וירידה:

אנו יודעים שבין כל שתי נקודות קיצון הפונקציה יכולה לעלות, לרדת או להישאר ללא שינוי (נקודת פיתול). העלייה, הירידה או הפיתול ייקבעו על-ידי מציאת שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהי שבין שתי נקודות הקיצון. כפי שהוסבר, את שיפוע המשיק לפונקציה בכל נקודה ניתן למצוא בעזרת פונקציית הנגזרת על-ידי הצבה של שיעור ה-x בנגזרת.

אנו מתרכזים בתחומים שבין נקודות הקיצון.

בתחום ש- $x < 0$ נציב $x = -3$ ונקבל:

$$f'(-3) = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 4(-2) = -32 < 0$$


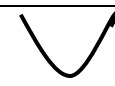



בתחום ש- $0 < x < 2$ נציב $x = 1$ ונקבל:

$$f'(1) = (1)^3 - 4 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1) = 1 > 0$$

בתחום ש- $x > 2$ נציב $x = 4$ ונקבל:

$$f'(4) = (4)^3 - 4 \cdot (4)^2 + 4 \cdot (4) = 1 > 0$$

נרשום את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$					
$f'(x)$	-	0	+	0	+

בתחומים שערך הנגזרת חיובי הפונקציה עולה ובתחומים שערך הנגזרת שלילי הפונקציה יורדת ולכן:

תחומי ירידה: $x < 0$

תחומי העלייה: $0 < x < 2$, $x > 2$

לכן נוכל לקבוע ש- $(0,0)$ היא נקודת מינימום

לכן נוכל לקבוע ש- $(2, \frac{1}{3})$ היא נקודת פיתול

בדיקה בעזרת הנגזרת השנייה

ניתן גם לקבוע מינימום מקסימום בעזרת הנגזרת השנייה.

גוזרים את הנגזרת ומציבים את הערך של x של הנקודה החשודה:

אם ערך הנגזרת השנייה בנקודה יוצא שלילי אז הנקודה היא נקודת מקסימום ואם ערך הנגזרת השנייה יוצא חיובי אז הנקודה היא מינימום.

*אם ערך הנגזרת השנייה יוצא אפס נצטרך לגזור שוב ולקבל את הנגזרת השלישית.
אם ערך הנגזרת השלישית שונה מאפס אז הנקודה היא נקודת פיתול.

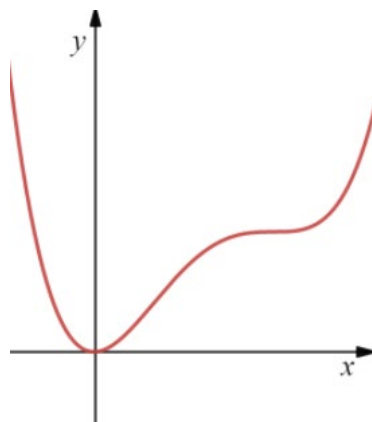
ד. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים:

ידוע ששיעור ה-y של נקודה הנמצאת על ציר ה-x הוא 0 וכמו כן ..
ידוע ששיעור ה-x של נקודה הנמצאת על ציר ה-y הוא 0

עם ציר ה-x $y=0$	עם ציר ה-x $y=0$
$f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{4}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 = 0$	$\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 = 0$
מתקבלת הנקודה: (0,0)	$x^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \right) = 0$
	מתקבלת הנקודה: (0,0)

ה. שרטוט הפונקציה

על מנת לשרטט את גרף הפונקציה יש תחילה לסדר את כל התוצאות שכבר קבלנו וזו לסמן אותם במערכת צירים ולמתוח עקומה.



"כל כך התרגלנו להעמיד פנים כלפי אחרים, עד שלא שמנו לב שאנו מעמידים פנים גם כלפי עצמנו" דוסטויבסקי

תרגול - חקירת פונקציה - פולינום

חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים.

- (1) מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- (2) מצאו את נקודות קיצון של הפונקציה, קבעו את סוג הנקודות (מינימום, מקסימום או פיתול)
- (3) מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציה
- (4) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים
- (5) שרטוט הפונקציה.

$$f(x) = -x^2 + 7x + 8 \quad .15 \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\frac{1}{2}x - 12 \quad .16$$

$$f(x) = x^2 + 2x \quad .17 \quad f(x) = -3x^2 + 9x \quad .18$$

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x \quad .19 \quad f(x) = x^3 + 3x^2 \quad .20$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad .21 \quad y = -x^3 - 3x^2 - 3x \quad .22$$

$$y = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 \quad .23 \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad .24$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x \quad .25 \quad f(x) = -3x^2 + x^3 \quad .26$$

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 \quad .27 \quad f(x) = \frac{x^3}{6} - 8x \quad .28$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2 \quad .29 \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- רשמו 2 נקודות הנמצאות על הפונקציה $f(x)$
- מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.
- שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(x)$
- האם $f(3)$ גדול מ- $f(-3)$? נמקו

30. חקרו את הפונקציה הבאה $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

- א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן
- ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x
- ג. שרטטו את גרף הפונקציה
- ד. מהו המרחק בין נקודות הקיצון של הפונקציה? נמקו

31. נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = x^2(x^2 - 2x + 1)$.

- א. חשבו את הערך של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=-1$
- ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו סוגן
- ג. רשמו את תחום החיוביות של הפונקציה $f(x)$
- נתונה פונקציה נוספת המקיימת $h(x)=f(x)+k$
- ידוע שלפונקציה $h(x)$ יש נקודת השקה אחת עם ציר ה-x
- ד. מצאו את ערכו של k
- נתונה פונקציה נוספת המקיימת $g(x)+2$
- ה. כמה נקודות חיתוך עם ציר ה-x יש לפונקציה $g(x)$

32. נתון שלפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

- א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ב. מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה
- ג. שרטטו את הפונקציה.
- נתונה פונקציה נוספת $g(x)=f(x)+1$
- ד. כמה נקודות חיתוך יש לפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x?

33. חקרו את הפונקציה הבאה $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

- א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ב. מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה
- ג. שרטטו את הפונקציה.
- נתונה פונקציה נוספת $g(x)=f(x)+1$
- ד. כמה נקודות חיתוך יש לפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x?

34. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 2bx^2 + 5x$, פרמטר b

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ב- $x=1$

א. מצאו את הפרמטר b

הציבו $b=2$ וענו על הסעיפים הבאים

ב. מהו תחום הגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג. מצאו את נקודות קיצון של הפונקציה $f(x)$, קבעו את סוג הנקודות (מינימום, מקסימום או פיתול)

ד. מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$

ה. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים

ו. שרטוט הפונקציה $f(x)$.

ז. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$

35. נתונה הפונקציה: $f(x) = (2-a)x^3 - 6x^2 + 9x$, פרמטר a

המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=2$ הוא $y = -3x + 8$

א. מצאו את הפרמטר a

הציבו $a=1$ וענו על הסעיפים הבאים

ב. מהו תחום הגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג. מצאו את נקודות קיצון של הפונקציה $f(x)$, קבעו את סוג הנקודות (מינימום, מקסימום או פיתול)

ד. מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$

ה. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים

ו. שרטוט הפונקציה $f(x)$.

ז. בכמה נקודות חותך הישר $y=-2$ את גרף הפונקציה $f(x)$

36. נתונה הפונקציה: $f(x) = mx^4 - (9 - m)x^2$, m פרמטר

הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(-1, -7)$

א. מצאו את הפרמטר m

הציבו $m=1$ וענו על הסעיפים הבאים

ב. מהו תחום הגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג. מצאו את נקודות קיצון של הפונקציה $f(x)$, קבעו את סוג הנקודות (מינימום, מקסימום או

פיתול)

ד. מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$

ה. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים

ו. שרטוט הפונקציה $f(x)$.

ז. עבור אילו ערכי k חותך הישר $y=k$ את הפונקציה $f(x)$ ב-4 נקודות

37. נתונה הפונקציה: $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + a$, m פרמטר

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום בנקודה שבה שיעור ה- y הוא 8

א. מצאו את הפרמטר a

הציבו $a=8$ וענו על הסעיפים הבאים

ב. מהו תחום הגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג. מצאו את נקודות קיצון של הפונקציה $f(x)$, קבעו את סוג הנקודות (מינימום, מקסימום או

פיתול)

ד. מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$

ה. הראו שלפונקציה יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x בנקודה שבה $x=1$

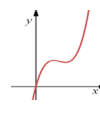
ו. שרטוט הפונקציה $f(x)$.

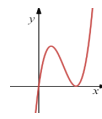
נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - 3$

ז. קבעו מהן נקודות קיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן

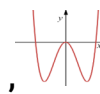
פתרונות


- 15. בקרוב
- 16. בקרוב
- 17. בקרוב
- 18. בקרוב
- 19. בקרוב
- 20. בקרוב
- 21.
- 22. בקרוב
- 23. בקרוב
- 24. בקרוב
- 25. בקרוב
- 26. בקרוב
- 27. בקרוב
- 28. בקרוב
- 29. בקרוב
- 30. בקרוב
- 31. בקרוב
- 32. בקרוב
- 33. בקרוב

34. פתרון: א. $b=2$, ב. כל x , ג. מקסימום $(1, 2)$ ומינימום $(1\frac{2}{3}, 1.85)$, ד. , ה. $(0, 0)$, ו. 

35. פתרון: א. $a=1$, ב. כל x , ג. מקסימום $(1, 4)$ ומינימום $(3, 0)$, ד. , ה. $(0, 0)$, ו. 

36. פתרון: א. $m=1$, ב. כל x , ג. מקסימום $(0, 0)$ ומינימום $(2, -16)$ ומינימום $(-2, -16)$, ה. $(0, 0)$,

ו.  $(\sqrt{8}, 0)$ $(-\sqrt{8}, 0)$, ו. $-16 < k < 0$

37. א. $a=8$, ב. כל x , ג. מקסימום $(0, 8)$ ומינימום $(-2, 0)$, ה. הוכחה ו.  ו. מקסימום $(0, 5)$ ומינימום $(-2, -3)$

פולינום – חקירת פונקציה בתחום סגור – קיצון קצה ומוחלט

38. בכל אחד מהסעיפים נתונה פונקציה מצאו את נקודת הקיצון המוחלטות

א. $-1 \leq x \leq 4$, $f(x) = x^2 - x$

ב. $-5 \leq x \leq 5$, $f(x) = x^3 - 2x$

ג. $-0 \leq x \leq 4$, $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2$

ד. $-3 \leq x \leq 2$, $f(x) = -x^2 - 2x$

ה. $-3 \leq x \leq 3$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$

ו. $-4 \leq x \leq 0$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3$

39. נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{x^4}{4} - x^3$ בתחום $-4 \leq x \leq 2$

א. מצאו את הנקודות, בהם מתאפסת הנגזרת.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. שרטטו את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ו. מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה.

40. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 6x$ בתחום $[-5, 4.5]$

א. מצאו את נקודות, שבהן שיפוע המשיק לפונקציה שווה לאפס

ב. מצאו את נקודות הקצה.

ג. מצאו את נקודה הגבוה בגרף ואת הנקודה הנמוכה ביותר, בתחום הנתון.

41. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ בתחום $-3 \leq x \leq 2$

א. מצאו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה

42. חקרו את הפונקציה הבאה $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ בתחום $-2 < x < 1.2$.
 א. מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה,
 ב. נקודות קיצון, ג. תחומי עלייה וירידה, ד. חיתוך עם הצירים. ה. שירטוט

43. מצא נקודות מינימום ומקסימום מוחלטות $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ בתחום $[-1,1]$.

פתרונות

38. בקרוב

39. בקרוב

40. בקרוב

41. בקרוב

42. בקרוב

43. א. כל x , ב. $\min(0,0)$, $\max(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$, ג. עולה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x > 1$, ירידה: $x < 0$ או $\frac{1}{2} < x < 1$.
 ד. $(0,0)$, $(-1.29,0)$, $(1.29,0)$, ה. שירטוט

חקירה מלאה (פרמטר שנשאר)

חקרו את הפונקציות הבאות: במקרה הצורך, השאירו תוצאות עם a (נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נק' חיתוך עם הצירים ושרטוט)

$$g(x) = x^2 - ax - 2a^2 \quad .45$$

$$f(x) = -x^2 + ax \quad .44$$

$$f(x) = -x^2 + 3ax + 4a^2 \quad .47$$

$$f(x) = ax^2 - 2x \quad .46$$

$$y = x^3 - ax^2 \quad .49$$

$$y = x^2 - (a - 3)x \quad .48$$

$$f(x) = x^3 - 3(a - 1)x^2 \quad .51$$

$$f(x) = x^3 - 12a^2x \quad .50$$

$$f(x) = \frac{1}{3}a^2x^3 - x \quad .53$$

$$y = x^4 - 2ax^2 \quad .52$$

54. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3ax$, $a > 0$

ענו על הסעיפים הבאים (במידת הצורך השתמשו ב- a).

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

ג. נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה

ה. לאילו ערכים של k חותך הישר הישר $y=k$ את הפונקציה בשלוש נקודות?

55. נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3ax^2 - a^3$, $a > 0$

ענו על הסעיפים הבאים (במידת הצורך השתמשו ב- a).

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

ג. הוכיחו ששיעור ה- x של נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x הוא $x = a$

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. הסבירו מדוע יש לפונקציה $f(x)$ נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x

56. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - ax^3$, $a > 0$

ענו על הסעיפים הבאים (במידת הצורך השתמשו ב- a).

- א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן
- ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה
- ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה

57. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^3 + 2ax^2 + a^2x$ עבור $a > 0$

- א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן
- ב. מצאו את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה וקבעו את סוגן
- ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים
- ד. שרטטו את הגרף של הפונקציה
- ה. קבעו בכמה נקודות חותך הישר $y = a^2$ את גרף הפונקציה $f(x)$

58. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^3 + 2ax^2 + a^2x$ עבור $a > 0$

- א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן
- ב. מצאו את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה וקבעו את סוגן
- ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים
- ד. שרטטו את הגרף של הפונקציה
- ה. קבעו בכמה נקודות חותך הישר $y = a^2$ את גרף הפונקציה $f(x)$

חקירת פונקציית פולינום – סיכום

59. נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = x^3 - (A - 1)x^2 + (1 - B)x + 4$

לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $(3, -5)$

א. מצאו את A ו-B.

הציבו $A=6, B=-2$ וענו על הסעיפים הבאים:

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$

נתון שהישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ ב-3 נקודות

ד. רשמו את הערכים האפשריים ל-k

ה. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה שיעור ה-x הוא 2

60. לפונקציה $f(x) = 3x^3 - nx^2 - mx + 5$ (n ו-m פרמטרים)

יודע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון ב- $x=2$ וששיפוע המשיק לפונקציה ב- $x=1$ הוא -11

א. מצא את הפרמטרים n ו-m

הציבו $n=8, m=4$ וענו על הסעיפים הבאים:

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$

ד. בכמה נקודות חותך הישר $y=5$ את גרף הפונקציה $f(x)$

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=f(x)+b$

נתון ציר ה-x משיק לפונקציה $g(x)$

ה. מצאו את ערכים של b (הבדילו בין שני מקרים)

61. לפונקציה $f(x) = (x^2 - 4)(b - x)$, פרמטר b

המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה ש- $x=2$ מאונך לישר $y = \frac{1}{6}x + 4$

א. מצא את הפרמטר b

הציבו $b=0.5$ וענו על הסעיפים הבאים

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x

ד. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$

ה. האם המשיקים לפונקציה בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x שבהן שיעור ה- x הוא הגדול ביותר והקטן ביותר. נפגשים? נמק

נתונה הפונקציה $h(x) = -2 \cdot f(x)$

ו. רשמו את נקודות הקיצון של $h(x)$ וקבעו את סוגן

62. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + \frac{2x^2}{a} - x + a$, פרמטר a

הפונקציה $f(x)$ עוברת בנקודה $(-1,3)$

א. מצא את הפרמטר a

הציבו את $a=2$ ופתרו את הסעיפים הבאים

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$

ד. רשמו 4 נקודות שונות שנמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$

נתונה הפונקציה $h(x) = f(x) - 3$

ה. רשמו את נקודות הקיצון של $h(x)$ וקבעו את סוגן

נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x) + m$, שיעור ה- y של אחת הנקודות הקיצון הוא 4

ו. מצאו את הערכים האפשריים ל- m

63. נתונה הפונקציה: $f(x) = a^2x^4 - (2 - 2a)x^2 + b$, a ו- b פרמטרים גדולים מאפס.

הפונקציה $f(x)$ משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$

א. מצא את הפרמטר a

הציבו $a = \frac{1}{2}$ ו- $b=1$ ענו על הסעיפים הבאים

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$

נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x) + k$

ד. קבעו את ערכו של k אם ידוע ש- $g(x)$ נוגעת פעם אחת בציר ה- x

64. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2$

יש לפונקציה משיק בנקודה שבה $y = -4$,

ששיפועו 9 והעובר בנקודה $(2, b)$ שלא נמצאת על הפונקציה.

א. מצאו את b

הציבו $b = 23$ וענו:

ב. (1) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן

(2) שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$

ג. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 - 3x^2 = -4$

נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x) + m$

ד. קבעו את תחום הערכים של m אם ידוע של- $g(x)$ יש 3 נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

65. לפונקציה $f(x) = -x^3 + 1.5x^2 + 6x + a$, פרמטר a .

המשיק לפונקציה בנקודה $x=3$ עובר בנקודה $(2,14.5)$.

- א. מצאו את משוואת המשיק הנ"ל
- ב. מצאו את הפרמטר a
- הציבו את $a = -2$ וענו על הסעיפים הבאים
- ג. מצאו את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן
- ד. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$
- ה. מצאו את משוואת הישר של ישר המאונך למשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=1$

66. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{a} - 12x + b$, פרמטרים a ו- b .

יש לפונקציה שתי נקודות קיצון, שיעור ה- y של אחת הנקודות הוא 3 ושיעור ה- x של נקודת הקיצון

השנייה הוא 2

- א. מצאו את a ו- b
- הציבו $a = -\frac{1}{3}$, $b = -4$ וענו על הסעיפים הבאים
- ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן
- ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$
- ד. שרטטו את הפונקציה $f(x)$
- ה. (1) כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=3$? נמקו
- (2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=-1$

67. לפונקציה $f(x) = ax^4 - bx^3$, פרמטר a .

נתון שתחומי העלייה של הפונקציה $f(x)$ הם: $x > 3$ ויורדת בשאר, מלבד ב- $x=0$.

א. הוכיחו ש- $b = 4a$

שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה היא -13.5

ב. מצאו את ערכם של a ו- b

הציבו את $a = \frac{1}{2}$ ו- $b = 2$ וענו על הסעיפים הבאים

ג. מצאו את הנקודות שבהן $f'(x)=0$ וקבעו את סוגן

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$

ו. רשמו משוואה של ישר החותך את הפונקציה $f(x)$ ב-2 נקודות וישר שחותך בנקודה 1

68. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ עבור $a > 0$

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן

ב. מצאו את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה וקבעו את סוגן

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

ד. שרטטו את הגרף של הפונקציה

ה. קבעו, בכמה נקודות חותך הישר $y = \frac{4}{27}a^2$ את גרף הפונקציה $f(x)$

69. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}a^2x^2$, $a > 0$

ענו על הסעיפים הבאים (במידת הצורך השתמשו ב- a).

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

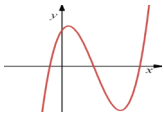
ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה

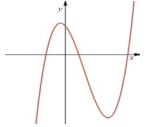
ה. מצאו את משוואת המשיך לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$

פתרונות

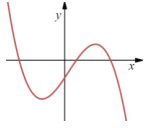
59. א. $b=-2, A=6$, ב. מיני' $(3,-5)$, מקסי' $(\frac{1}{3}, 4\frac{13}{27})$, ג. $(\frac{1}{3}, 4\frac{13}{27})$, ד. $-5 < k < \frac{120}{27}$, ה. $y=-5x+8$



60. א. $m=4, n=8$, ב. מיני' $(2,-11)$, מקסי' $(-\frac{2}{9}, 5.46)$, ג. $(-\frac{2}{9}, 5.46)$, ד. $m=11$



61. א. $b=0.5$, ב. מיני' $(-1,-4.5)$, מקסי' $(1\frac{1}{3}, 1.85)$, ג. $(-2,0), (0.5,0), (-2,0)$, ד. $(-2,0)$



62. בקרוב

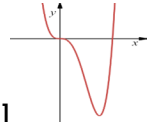
63. בקרוב

64. בקרוב

65. בקרוב

66. בקרוב

67. א. הוכחה, ב. $a = \frac{1}{2}$ ו- $b = 2$, ג. מינימום $(3,-13.5)$, פיתול $(0,0)$, ד. $(0,0)$, ה. $(4,0)$

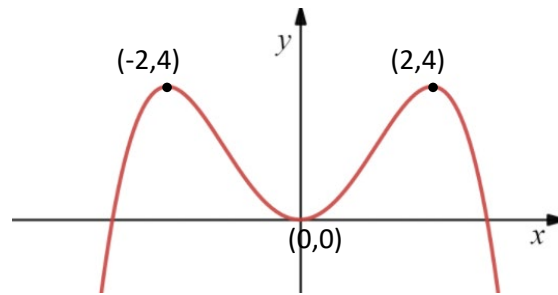


68. בקרוב

69.

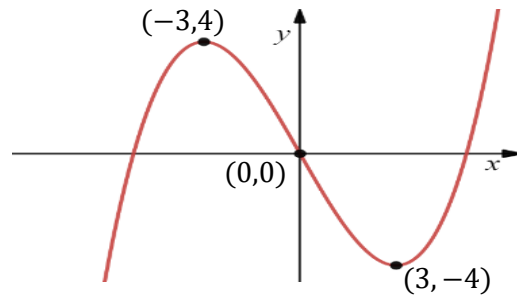
סעיפי חשיבה - חקירת פונקציה

1. נתון גרף הפונקציה $f(x)$



- א. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 3$
מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן
- ב. נתונה הפונקציה $h(x) = 2 \cdot f(x)$
מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ וקבעו את סוגן
- ג. נתונה הפונקציה $t(x) = -f(x)$
מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $t(x)$ וקבעו את סוגן
- ד. נתונה הפונקציה $m(x) = -2 \cdot f(x) + 3$
מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $m(x)$ וקבעו את סוגן
- ה. נתונה הפונקציה $r(x) = (f(x))^2$
מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $r(x)$ וקבעו את סוגן
- ו. נתונה הפונקציה $w(x) = a + f(x)$
מצאו את הערכים של a שעבורם לגרף הפונקציה $w(x)$ יש 2 נקודות חיתוך עם ציר ה- x
- ז. נתונה הפונקציה $e(x) = b + f(x)$
מצאו את הערכים של b ,
שעבורם לגרף הפונקציה $w(x)$ יש לפחות נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x
- ח. נתונה הפונקציה $z(x) = k + f(x)$
מצאו את הערכים של k ,
שעבורם לגרף הפונקציה $w(x)$ יש לכל היותר 2 נקודות חיתוך ציר ה- x

2. נתון גרף הפונקציה $f(x)$



א. נתון הישר $y=k$

- (1) עבור אילו ערכי k הישר חותך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות
- (2) עבור אילו ערכי k הישר חותך את גרף הפונקציה לפחות ב-2 נקודות
- (3) עבור אילו ערכי k הישר חותך את גרף הפונקציה לכל היותר ב-2 נקודות

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = -2 \cdot f(x)$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = a \cdot f(x)$

נתון שלפונקציה $h(x)$ יש נקודות מינימום ב- $(-3,2)$, מצאו את ערכו של a ואת נקודות הקיצון השנייה

ד. נתונה הפונקציה $t(x) = c \cdot f(x) + b$

נתון שלפונקציה $t(x)$ יש נקודת קיצון ב- $(-3,-2)$ ונקודת קיצון ב- $(3,6)$
מצאו את ערכם של b ו- c

ה. נתונה הפונקציה $m(x) = -2 \cdot f(x) + 3$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $m(x)$ וקבעו את סוגן

ו. נתונה הפונקציה $r(x) = (f(x))^2$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $r(x)$ וקבעו את סוגן

ז. כמה פתרונות יש לשוויון הבא: $f(x) = 3$

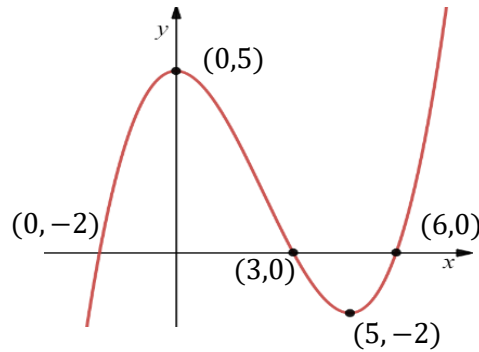
מצאו את הערכים של a שעבורם לגרף הפונקציה $w(x)$ יש 2 נקודות חיתוך עם ציר ה- x

ח. נתונה הפונקציה $e(x) = b + f(x)$

מצאו את הערכים של b ,

שעבורם לגרף הפונקציה $w(x)$ יש לפחות נקודת חיתוך ציר ה- x

3. נתון גרף הפונקציה $f(x)$



א. נתון הישר $y=k$

- (4) עבור אילו ערכי k הישר חותך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות
- (5) עבור אילו ערכי k הישר חותך את גרף הפונקציה לפחות ב-2 נקודות
- (6) עבור אילו ערכי k הישר חותך את גרף הפונקציה לכל היותר ב-2 נקודות

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = -2 \cdot f(x)$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = f(x - 2)$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$

ד. נתונה הפונקציה $s(x) = f(x + 4)$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $s(x)$

ה. נתונה הפונקציה $m(x) = f(x - 1) + 3$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $m(x)$ וקבעו את סוגן

ו. נתונה הפונקציה $r(x) = (f(x))^2$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $r(x)$ וקבעו את סוגן

ז. נתונה הפונקציה: $w(x) = f(x + c)$ של נקודת קיצון ב- $x=7$

מצאו את הערכים האפשריים ל- c

ח. נתונה הפונקציה $e(x) = b + f(x)$

מצאו את הערכים של b ,
שעבורם לגרף הפונקציה $w(x)$ יש לפחות נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x