

כיתה י - בעיות קיצון - פולינום

בעיות מספרים, גרפים וגיאומטריות

בעיות מספרים

- הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 18. המספר השני גדול פי 2 מהמספר הראשון.
 - סמן ב- x את המספר הראשון, והבע באמצעותו את המספר השלישי.
 - מצא את הערך של x , שעבורו מכפלת שלושת המספרים, תהיה מקסימלית.
- הוכיחו שסכום מספר וריבועו גדול או שווה ל- $-\frac{1}{4}$.
- מבין כל המספרים החיוביים x ו- y , המקיימים $2x + y = 7$
 - מצאו את שני המספרים, שמכפלתם מינימלית.
 - מצאו את המכפלה המינימלית.
- מבין כל המספרים החיוביים x ו- y , המקיימים $y = 9 - x$, מצאו את שני המספרים, שמכפלתם מינימלית.
- נתונים שלושה מספרים, שמכפלתם 120. ידוע, שהראשון גדול פי 5 מהשני.
 - מצא את סכום שלושת המספרים המינימלי.
 - הסבר מדוע, אין סכום מקסימלי סופי.
- נתונים שלושה מספרים חיוביים, שסכומם 13. הראשון גדול מהשני פי 3.
 - מצאו את שלושת המספרים, שסכום ריבועם הוא מינימלי.
 - מצאו את סכום הריבועים המינימלי.

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

7. נתונים שני מספרים, שסכומם 24.

א. מצאו את שני המספרים, שמכפלת האחד בריבועו של השני, תהייה מקסימלית.

ב. מצאו את שני המספרים, שסכום ריבועם הוא מינימלי.

8. נתונים שלושה מספרים חיוביים, שסכומם m. הראשון גדול מהשני פי 2.

א. מצאו את שלושת המספרים, שמכפלתם מינימלית.

ב. מצאו את המכפלה המינימלית.

9. נתונים שלושה מספרים חיוביים, שסכומם k. הראשון גדול מהשני פי 2.

א. מצאו את שלושת המספרים, שמכפלתם מינימלית.

ב. מצאו את המכפלה המינימלית.

10. נתונים שלושה מספרים חיוביים. ידוע, שהראשון גדול מהשני פי 2, והשלישי שווה ריבועו של השני.

נסמן ב-x את המספר השני.

א. הביעו את התוצאה של חיבור המספר הראשון מסכום המספרים השני והשלישי בעזרת x.

ב. מצאו את שלושת המספרים, אם ידוע, שהתוצאה המתקבלת היא מינימלית

ג. מצאו את התוצאה המינימלית.

בעיות מספרים - פתרון

1. א. $18-3X$, $2X$, X . ב. 8, 6, 4

2. דד

3. א. $3\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$. ב. $6\frac{1}{8}$

4. ג

5. **שובה:** א. 18 ב. ככל שלוקחים את המספר הראשון, קטן יותר הסכום גדל.

6. **תשובה:** א. 5, 6, 2 ב. 65

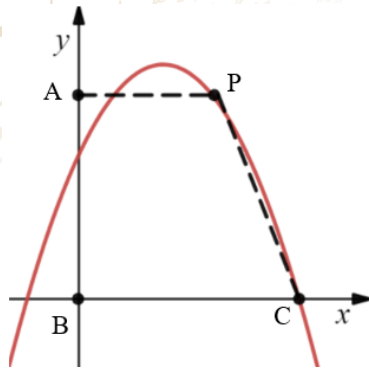
7. **תשובה:** א. 8, 16 ב. 12, 12

8. **תשובה:** א. $\frac{4m}{9}$, $\frac{2m}{9}$, $\frac{3m}{9}$. ב. $\frac{8m}{243}$

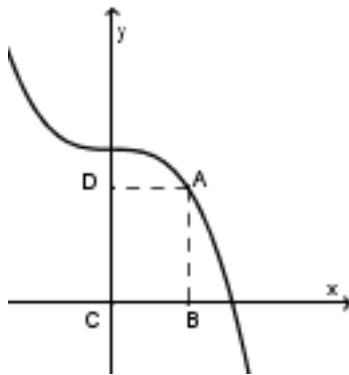
9.

10. כ

בעיות גרפיים

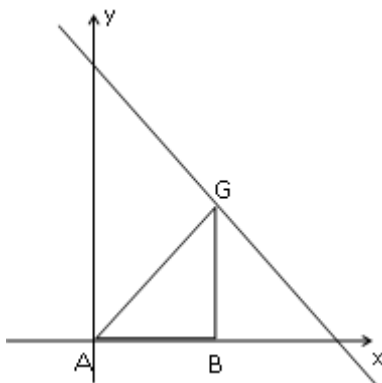


11. בשרטוט ניתן לראות את הגרף של הפונקציה $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.
 דרך נקודה P, שעל הפונקציה, העבירו ישר, המקביל לציר ה-x וחותר את ציר ה-y בנקודה A.
 א. סמנו את שיעור ה-x של הנקודה P ב-X, והביעו את שיעור ה-y של נקודה P בעזרת x.
 ב. מצאו, מה צריכים להיות שעורי נקודה P, על מנת ששטח הטרפז ABCP יהיה מקסימלי.
 ג. מהו השטח הטרפז המקסימלי המתקבל?



12. נתונה הפונקציה $y = -x^3 + 4$. בפונקציה והצירים חסום מלבן ABCD, כמתואר בציור.
 א. מצאו, מה צריכים להיות שעורי הנקודה A, על מנת ששטח המלבן, שחסום, יהיה מקסימלי.
 ב. מהו השטח המקסימלי?

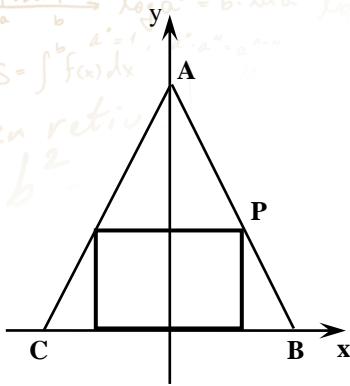
תשובה: א. $A(1,3)$ ב. 3



13. בשרטוט נתון גרף הפונקציה $y = -x + 6$.
 מנקודה G על הפונקציה מורידים אנך לציר ה-x, כך שנוצר משולש ישר זווית ABG, החסום בין הצירים והפונקציה כמתואר בציור.
 נסמן את שעורי נקודה $G(x, -x + 6)$ (נקודה ייצוגית)
 א. מצאו מה צריכים להיות שעורי הנקודה G, על מנת ששטח המשולש, שחסום, יהיה מקסימלי.
 ב. מהו השטח המקסימלי?

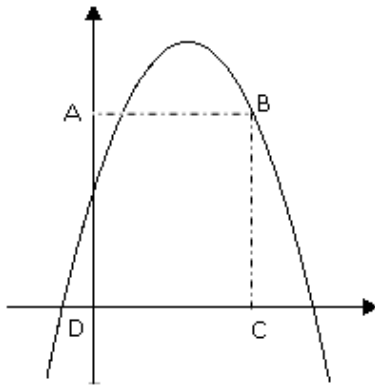
תשובה: א. $A(3,3)$ ב. 4.5

"קריאת כל הספרים הטובים היא אכן כמו שיחה עם האנשים האצילים ביותר, מהמאות החולפות, שכתבו אותם. זו שיחה מכוונת היטב, בה הם חושפים בפנינו רק את הטובים שבהוריהם" - רנה דקארט



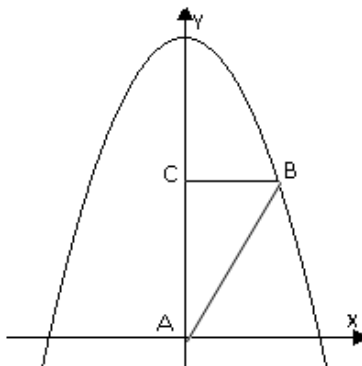
14. נתון משולש שווה שוקיים ABC, ששני קודקדיו הם $A(0,10)$, $B(5,0)$. בתוך משולש זה חסום מלבן כמתואר בציור.

- מצאו את משוואת הישר עליו מונחת הצלע AB.
- הביעו את שעורי נקודה P באמצעות x.
- מצאו את שטח המלבן בעל השטח המקסימאלי.



15. נתון גרף הפונקציה $y = -x^2 + 27$ ברביע הראשון. ישר, המקביל לציר ה-x, חותך את גרף הפונקציה בנקודה A, שנמצאת ברביע הראשון, ואת ציר ה-y בנקודה B. מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים. ראו ציור.
א. מה צריך להיות אורך הקטע AB, כדי ששטח המשולש ACB יהיה מקסימלי?
ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

תשובה: א. $B(3,18)$. ב. 27



16. נתון גרף הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 3$ ברביע הראשון. ישר, המקביל לציר ה-x, חותך את גרף הפונקציה בנקודה B, שנמצאת ברביע הראשון, ואת ציר ה-y בנקודה A. ישר, המקביל לציר ה-y, חותך את גרף הפונקציה בנקודה C, שנמצאת ברביע הראשון.

- מה צריכים להיות שעורי נקודה B, כך ששטח המלבן ABCD יהיה מקסימלי.
- מהו השטח במקסימלי?
- מה הוא השטח המינימלי? נמקו.

תשובה: א. $B(3,6)$. ב. 18 יח"ר ג. 0

"האגודל לבדו משכנע אותי בקיומו של הבורא" - איזיק ניטון

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - **התמחות ב"ח"ל**
 "תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

17. נתון הישר $y = -2x + 12$, מנקודות D ו-C שעל הישר הורידו שני ישרים

המקבילים לציר ה-y החותכים את ציר ה-x בנקודות A ו-B כמתואר בציור.

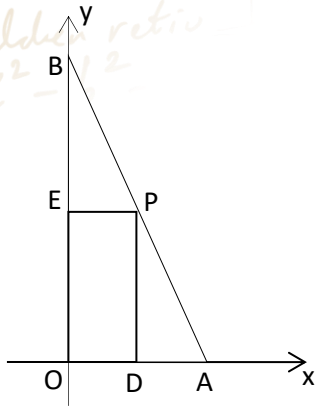
ידוע ששיעור ה-x של נקודה A גדול פי שתיים משיעור ה-x של נקודה B.

נסמן: $A(t,0)$ ו- $B(2t,0)$.

א. הביעו את שטח הטרפז באמצעות t.

ב. מה צריך להיות שיעור ה-x של נקודה A על מנת ששטח הטרפז יהיה

מקסימאלי?



18. לפניך הגרף של הפונקציה $y = -x^2 + 9$. בתוך פונקציה חסום טרפז,

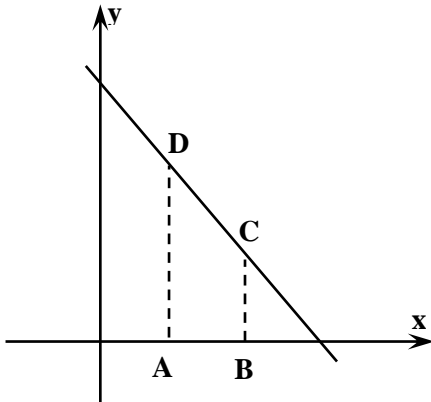
כמתואר בציור.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x

ב. מצאו, מה צריכים להיות שעורי נקודה Q, כדי ששטח הטרפז

PQRS יהיה מקסימלי

ג. מצאו את השטח המקסימלי



תשובה: א. $S(3,0)$, $R(-3,0)$ ב. $R(1,8)$, ג. 32 יח"ר

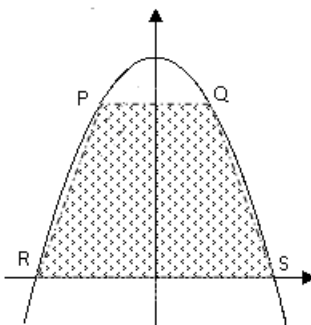
19. נתון, שבמשולש ABO אורכי הניצבים הם: $OB=8$, $OA=4$. מנקודה P שעל היתר AB, העבירו ישרים,

המקבילים לצירים, כך שנוצר מלבן, כמתואר בציור. (המלבן חסום במשולש).

א. מצאו את משוואת היתר AB.

ב. מצאו, מה צריכים להיות מימדי המלבן, כדי ששטחו יהיה מקסימלי.

ג. מה הוא השטח של המלבן בעל השטח המקסימאלי.



תשובה: א. $y = -2x + 8$ ב. $R(2,4)$ ב. $R(1,8)$ ג. 8 יח"ר

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"ח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גארד

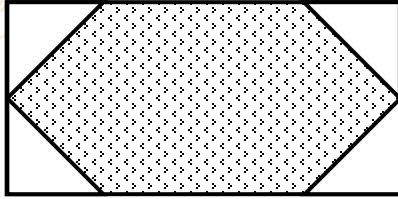
20. נתונה הפונקציה הבאה: $y = x^3 + 2x^2 + x$

א. מצאו את שיעור ה-x של הנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא המינימלי

ב. מהו השיפוע המינימלי?

בעיות גאומטריות

21. נתון חלון מלבני, שהיקפו 160 ס"מ. החלון בנוי כך, שפינותיו הן משולשים שווים שוקים באותו הגודל,



עשויים מעץ, ושאר החלון עשוי מזכוכית. מחיר העץ עולה 4

שקלים, ומחיר לסמ"ר זכוכית עולה 2 שקלים לסמ"ר.

א. בטאו את שטח הזכוכית, אם ידוע, שאורך צלע משולש הוא X

ב. מצאו את אורך צלע של המשולש, עבורו שטח הזכוכית הוא

מקסימלי.

ג. כמה יעלה חלון, כאשר שטח הזכוכית הוא מקסימלי?

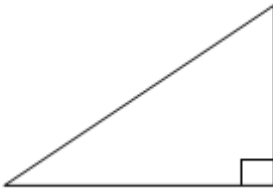
תשובה: א. $s(x) = 320x - 10x^2$, ב. 16 ס"מ ג. 7168 שקל

22. ידוע, שסכום אורכי ניצביו של משולש שווה ישר זווית הוא 12

ס"מ.

א. מצא את השטח המקסימלי של המשולש.

ב. מהו סוגו של המשולש בעל השטח המקסימלי



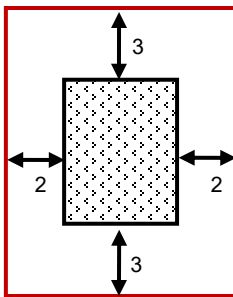
תשובה: א. $S(3,0)$, $R(-3,0)$, ב. $R(1,8)$, ג. 32 יח"ר

23. בתוך מלבן, היקפו 96 ס"מ, יש מלבן נוסף כמתואר בשרטוט.

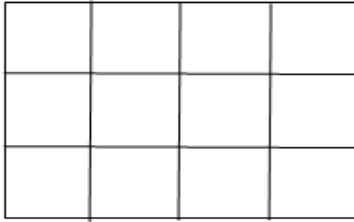
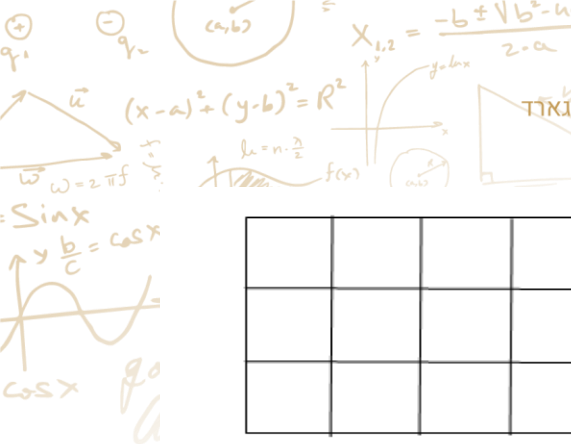
א. מצאו, מה צריכים להיות אורכי הצלעות של המלבן החיצוני, כדי ששטח

המלבן הפנימי יהיה מקסימלי.

ב. מצא את השטח הלבן המינימלי (השטח בין ההקיף החיצוני לפנימי)



תשובה: א. 12, 8 ב. 72 יח"ר



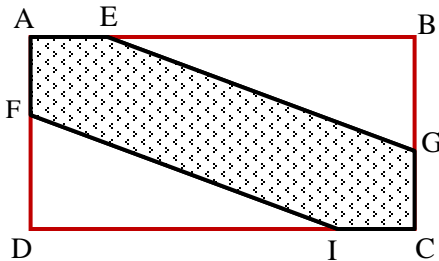
24. מחוט תיל, שאורכו 90 ס"מ, בנו רשת בצורה מלבנית. כמתואר
בציור (רשת קוביות).
א. מצאו, מה צריכים להיות ממדיה של הרשת, כדי ששטחה
יהיה מקסימלי.
ב. מה הוא שטח הרשת המקסימלי

תשובה: א. 9, 15 ב. 135 יח"ר

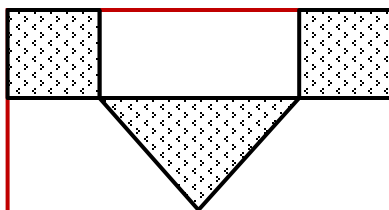


25. מגרש כדורגל בצורה מלבנית, מסביב למגרש כדורגל (3)
(מצלעותיו) בנו גדר שאורכה 220 ס"מ, ועל צלע אחת יש יציע
מרכזי.
א. חשבו מה צריכים להיות ממדיו של המגרש, על מנת
שאורך הגדר יהיה מקסימלי.
ב. מהי צורת המגרש, כאשר אורך הגדר מקסימלי הוא
מקסימלי?

26. נתון, היקף המלבן הוא 144 סמ"ר.

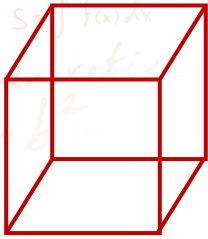
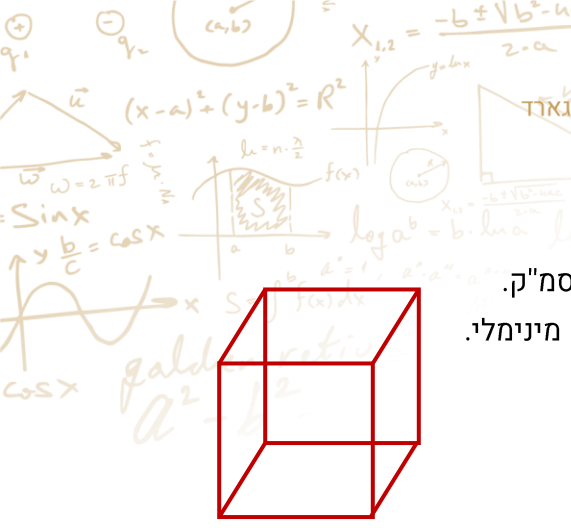


בנוסף נתון, ש- $AF = AE = CG = CI = 5$ ס"מ.
א. נסמן את AD ב-X, מצא את שטח המשושה
FAEGCI.
ב. מה צריכים להיות מימדי המלבן, כדי ששטח
המשושה יהיה מינימלי.



27. נתון, היקף המלבן הוא 98 סמ"ר. גוזרים מתוך שטח המלבן שני
ריבועים ומשולש כמתואר בציור. נתון, שאורך צלע הריבוע הוא 3
ס"מ.
א. מצאו, מה צריכים להיות מימדי של המלבן, כך שהשטח,
שנגזור, יהיה מקסימלי,
ב. מצא את שטח הגזור המינימלי

תשובה: א. 7, 14 ב. 34 יח"ר



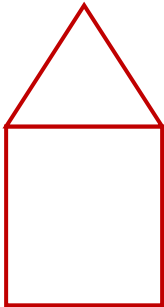
28. מקצועות התיבה בנויים מחוט תיל ארוך. נתון, שנפח התיבה הוא 125 סמ"ק.
- חשבו. מה צריכים להיות מימדי התיבה. כדי שאורך החוט יהיה מינימלי.
 - מהו אורך החוט המינימלי?
 - איזו צורה התקבלה?

תשובה: א. 5, 5, 5 ב. 60 יח"א ג. קוביה

29. היקף מעוין הוא 98 סמ"ר.

- חשבו, מה צריכים להיות אורכי אלכסוניו, על מנת שסכומם יהיה מינימלי.
- מהו היקפו של המעוין, שסכום אלכסוניו הוא מינימלי.
- איזו צורה התקבלה?

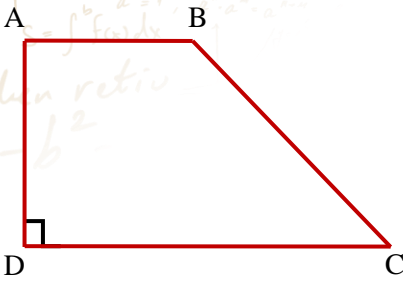
תשובה: א. 14, 14 ב. 39.6 יח"ר, ג. ריבוע



30. נתון, מלבן שעל אחת צלעותיו בנו משולש שווה צלעות, כמתואר בציור.
- היקף כל הצורה החדשה הוא 75 ס"מ.
- מצאו את אורכה של צלע המשולש, כך ששטח המלבן יהיה מקסימלי.
 - במהו השטח של הצורה (כולל המשולש), כאשר ידוע, ששטח המלבן מקסימלי?

תשובה: א. 12.5 יח"א ב. 369.7 יח"ר

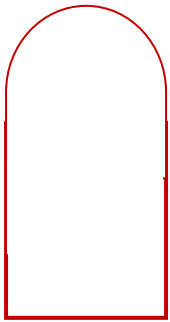
"העולם הוא מקום מסוכן לחיות בו, לא בגלל האנשים שעושים רע, אלא בגלל אלו שלא עושים דבר בעניין" אלברט איינשטיין.



31. נתון טרפז ישר זווית ABCD שהיקפו 42 ס"מ ואורך השוק

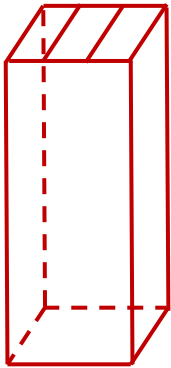
הארוכה הוא 16 ס"מ.

- א. סמנו את אורך השוק הקצרה, AD ב-x והביעו את סכום הבסיסים של הטרפז.
- ב. מצאו מה צריך להיות אורך הצלע AD על מנת ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימאלי?
- ג. מצאו את שטחו המקסימאלי של הטרפז.



32. נתון חלון שהיקפו 178.5 ס"מ. החלון בנוי במלבן וחצי מעגל כמתואר באיור.

- א. נסמן את רדיוס החצי מעגל ב-x והביעו באמצעות x את שטחו של החלון.
- ב. מצאו את ממדי המלבן כך ששטח החלון שהתקבל יהיה מקסימאלי (השתמשו ב- $\pi = 3.14$)



33. על מנת לבנות שלד בניין, שבסיסו ריבוע, השתמש המהנדס ב-240 מטר ברזל כולל

- שני מוטות ברזל בגג בבית. ידוע, שאורך צלע בסיס הוא x מטר.
- א. הבע באמצעות x את גובה הבניין.
- ב. מצאו את גובה הבניין, שעבורו מתקבל שטח של קיר חיצוני מקסימאלי.

34. נתונים שני משולשים ישרי זווית ABC ו-EDC, ידוע שסכום הניצבים של משולש ABC הוא a, כמו כן

- ידוע שניצביו של משולש EDC גדולים פי שתיים מניצביו של משולש ABC.
- א. מה צריכים להיות אורכי ניצביו של משולש ABC על מנת שסכום השטחים של שני המשולשים יהיה מקסימאלי?
- ב. פי כמה גדול שטח משולש EDC משטח משולש ABC?

35. טאבלט בחנות מחשבים עולה 1,000 שקלים. חנות המחשבים פרסמה מבצע לקבוצות המעוניינות לרכוש טאבלטים במחיר מוזל, כאשר נאמר שאם קבוצה תקנה מעל 3 טאבלטים על כל טאבלט מעל השלישי יהיה תשלום על כל טאבלט קטן ב- 40 שקלים נוספים (לדוגמא אם הקבוצה תקנה 7 טאבלטים מחיר כל טאבלט יהיה 840 שקלים, הנחה של 160 שקלים לאחד)
- א. סמנו ב-x את מספר הטאבלטים שנקנו בקניה אחת מעבר ל-3 הראשונים והביעו את ההכנסות של החנות ממכירת כל הטאבלטים בקנייה זו.
- ב. איזה כמות של טאבלטים בקניה אחת תכניס לחנות רווח מקסימאלי?
- ג. מהו הרווח המקסימאלי.

פתרון

- כ.11
כ.12
כ.13
כ.14
כ.15
כ.16
כ.17