

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון – אלגברה והסתברות
 - פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

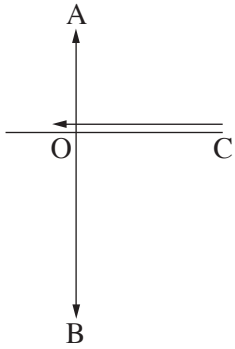
השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות



1. הנקודה A נמצאת מצפון לנקודה O והנקודה B נמצאת מדרום לנקודה O.
 הנקודה C נמצאת ממזרח לנקודה O, במרחק של 12 ק"מ ממנה, כמתואר בסרטוט.
 ביום ראשון יצא אורי להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A.
 באותו הזמן יצאה סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O.
 מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות ההליכה של אורי.
 נתון כי ברגע שהגיע אורי לנקודה A, המרחק האווירי בינו לבין סמדר היה $\sqrt{424}$ ק"מ.
 המהירויות של אורי ושל סמדר קבועות.
- א. מצאו את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון, אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O.
 באותו יום יצא בועז להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B. בועז יצא להליכה 20 דקות לאחר שיצא אורי להליכה.
 מהירות ההליכה של בועז הייתה קבועה וגדולה ב- 50% ממהירות ההליכה של אורי.
 כאשר הגיע אורי לנקודה A, המרחק בינו לבין בועז היה 23 ק"מ, ובאותו רגע שניהם עצרו.
- ב. מצאו את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בועז.
 ביום שני יצאו אורי ובוועז להליכה באותו הזמן. כל אחד מהם יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון, והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון. בועז הקטין את מהירות הליכתו ב- v קמ"ש ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב- v קמ"ש.
 שניהם עצרו כאשר המרחק ביניהם היה 27 ק"מ.
- ג. מצאו כמה דקות הלך אורי ביום שני.

2. נתונה סדרה חשבונית a_1, a_2, \dots, a_{3n} שבה $3n$ איברים, והפרש שלה הוא d .

נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$.

סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצאו את d .

3. עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00.

מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{2}{3}$,

וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{7}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו

את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

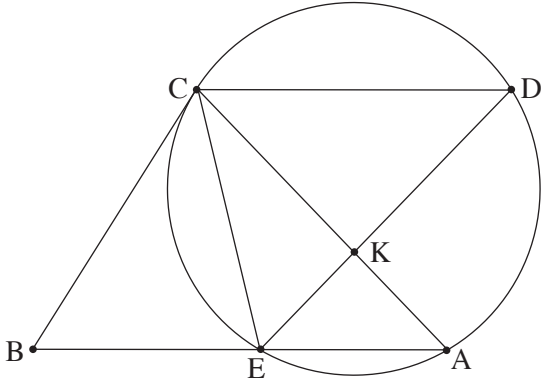
מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

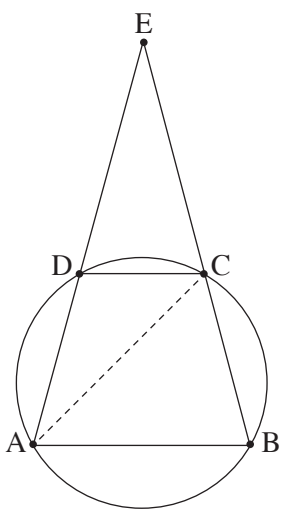
באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט. הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים AC ו-ED נחתכים בנקודה K.
- א. הוכיחו: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.
 - נתון: $ED = 7$, $AK = 3$.
 - נסמן את שטח המשולש CEK ב-S.
 - ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.
 - נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.
 - ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.
 - הנקודה O היא מרכז המעגל.
 - ד. הוכיחו: $\angle COE = \angle CKE$.
 - נתון: $\angle CAE = 45^\circ$.
 - ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו-K נמצאות על מעגל אחד.



5. נתון טרפז ABCD ($AB \parallel DC$), החסום במעגל. המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט. נתון: $\angle ACB = 60^\circ$.
- נסמן: $\angle CDE = \alpha$, $AC = k$.
- א. (1) מצאו את זוויות המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).
 - (2) הביעו באמצעות α ו-k את אורכי הצלעות AB ו-DC.
- נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.
- ב. מצאו את גודל הזווית α .
 - ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{63}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x - 3)^2}$, $0 < a < 3$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

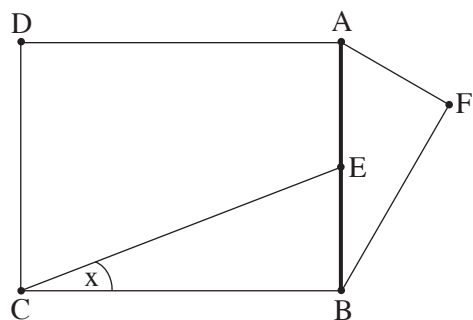
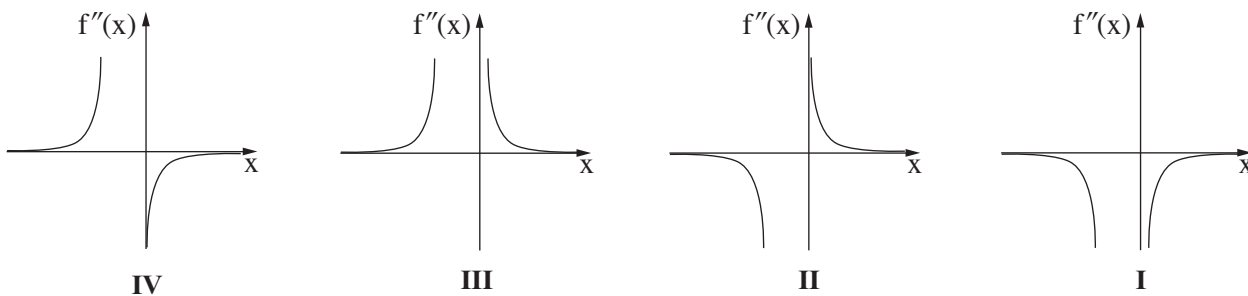
ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקצייה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי

ציר ה- y .

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + x}}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.
 (3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 ג. היעזרו בגרף הפונקצייה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$.



8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB. על הקטע AB בונים מלבן ABCD ומשולש ישר זווית AFB, $\angle AFB = 90^\circ$, כמתואר בסרטוט. נתון: $\angle ECB = x$, $\angle FAB = 2x$. נסמן את אורך הקטע AB ב- h .
- א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.
 ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.
 ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.
 ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

בהצלחה!

פתרון מועד ב' - 2023 - 581

1. א. אורי - 10 ק"מ, סמדר - 30 ק"מ ב. אורי - 4 קמ"ש, סמדר - 6 קמ"ש ג. 24 דקות.

2. א. הוכחה, ב. הפרש הסדרה שלילי, ג. 39 איברים ד. $d=3$

3. א. $p = \frac{4}{15}$ ב. 56% ג. $\frac{30}{121}$ ד. 0.927

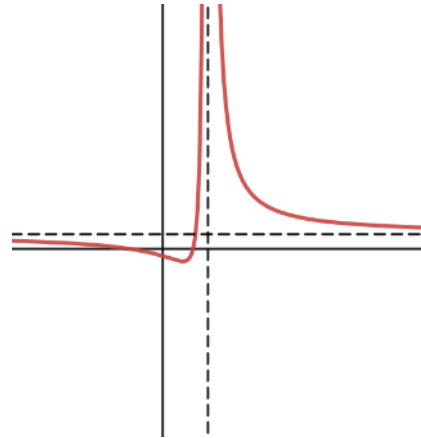
4. א. הוכחה, ב. $\frac{4}{3}S$ ג. $\frac{175}{96}S$ ד. הוכחה ה. הוכחה

5. א. $AB = \frac{\sqrt{3}k}{2\sin\alpha}$, $CD = \frac{k\sin(2\alpha-120)}{\sin\alpha}$ (2) $\sphericalangle E = 180 - 2\alpha$, $\sphericalangle ECA = 120$, $\sphericalangle EAC = 2\alpha - 120$ (1).

ב. $\alpha = 75^\circ$ ג. $K=6$

6. א. $x \neq 3$ (1) $x = 3, y = 1$ (2) $x = 3, y = 1$ (3) $(0, -\frac{a^2}{9})$ (4) $(a, 0), (-a, 0)$ $x = \frac{a^2}{3}$ מינימום,

(5)

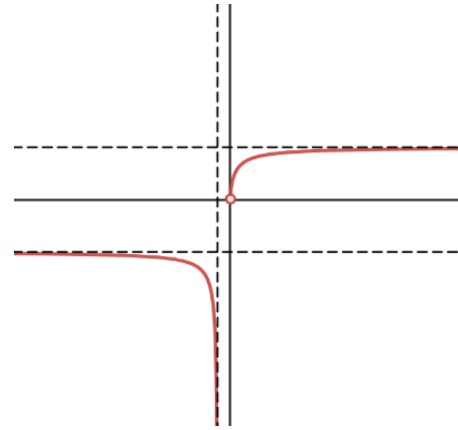


ב. (1) הוכחה (2) $\frac{a^2}{6}$

7. א. $x < -1$ או $x > 0$ (2) לא (3) $x = -1, y = 4, y = -4$ (4) תחומי עלייה: $x > 0$, תחומי ירידה: $x < -1$

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח 5"
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

ב.



ג. גרף I ד. 0.435

8. א. $0 < x < 45$ ב. $h \cos(2x) - \frac{h}{2 \sin x}$, $x=30^\circ$ ד. 4.

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

5 יח"ל - 581 - 2023 - מועד מיוחד

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. רוני ושיר יצאו בשעה 10:00 לריצה לאורך מסלול AB.
רוני יצאה מנקודה A ושיר יצאה מנקודה B. הן רצו זו לקראת זו ונפגשו בשעה 10:40.
כל אחת מהן רצה במהירות קבועה. מהירות הריצה של רוני הייתה גבוהה פי 1.4 ממהירות הריצה של שיר.
א. הביעו את אורך המסלול AB באמצעות מהירות הריצה של שיר.
רוני עצרה במקום המפגש למנוחה של שעה, ואילו שיר המשיכה לרוץ באותה המהירות שבה היא רצה לפני כן, עד שהגיעה לנקודה A.
מייד כשהגיעה שיר לנקודה A היא רצה בחזרה לנקודה B, במהירות הגבוהה פי 1.5 ממהירות ההתחלתית.
מייד בסוף המנוחה שלה, המשיכה רוני להתקדם בהליכה לכיוון נקודה B.
מהירות ההליכה של רוני הייתה נמוכה ב-6.6 קמ"ש ממהירות הריצה שלה.
רוני ושיר הגיעו לנקודה B בדיוק באותה השעה.
ב. מצאו את מהירות הריצה ההתחלתית של שיר.
ג. באילו שעות, לאחר הפגישה הראשונה, היה המרחק בין רוני לשיר 3 ק"מ? מצאו את שתי האפשרויות.

2. נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי).

d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_t = \frac{a_t + a_{t+1}}{2}$.

בסדרה B יש $2n - 1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב- S_A את סכום האיברים בסדרה A.

נסמן ב- S_B את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו: $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

נתון: $S_A = 220 + S_B$, $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$.

ג. (1) מצאו את n.

(2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

3. כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים.

ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון היא $P > 0.5$.

אם המועמד הצליח במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא $P + 0.1$.

אם המועמד נכשל במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא $P - 0.4$.

נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין השניים היא $\frac{1}{4}$.

א. מצאו את P.

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

ב. ידוע כי מועמד הצליח לפחות במבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לפקולטה?

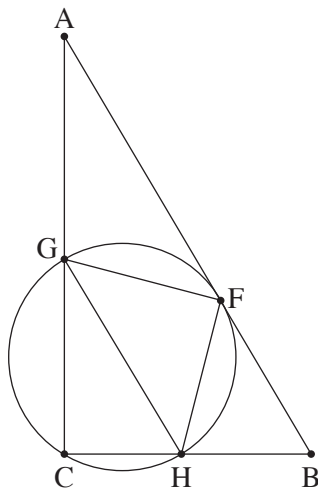
שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

ג. מהי ההסתברות ששני מועמדים מבין שלושה התקבלו לפקולטה ואחד מהם נכשל בשני המבחנים?

n מועמדים נבחנו בשני המבחנים ($n \geq 2$).

ד. הביעו באמצעות n את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה.

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. המשולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\angle ACB = 90^\circ$. הנקודות F, G, H, נמצאות על הצלעות AB, AC, CB בהתאמה, כך שהמרובע GCHF חסום במעגל (ראו סרטוט).

נתון: AB משיק למעגל בנקודה F,

$AB \parallel GH$.

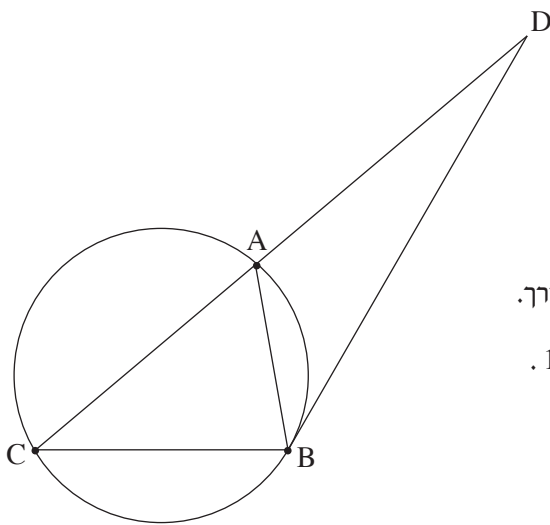
א. הוכיחו: $FG = FH$.

ב. (1) מצאו את גודל הזווית $\angle ACF$.

(2) הוכיחו: $\triangle GFC \sim \triangle FBC$.

קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC בנקודה E.

ג. הוכיחו: $\angle FEB = \angle FCB$.



5. המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA בנקודה D, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle ABD = \alpha$.

נתון: $\angle DBC = 120^\circ$.

א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו-BC באמצעות R ו- α , אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA הוא 1.8.

ב. מצאו את α .

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 6.

ג. מצאו את R.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^3(x)$ המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- א. (1) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$.

- ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
 ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 9}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
 (4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה (U) וכלפי מטה (∩) של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = -f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

- ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$.

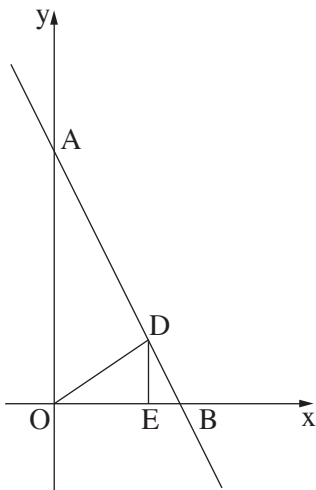
נתון: $a > 5$ הוא פרמטר.

- ד. סדרו את הביטויים I-II-III שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

$$\int_{-a+1}^{-a+2} (f(x) - h(x)) dx \quad \text{III}$$

$$\int_{a+1}^{a+2} (f(x) - h(x)) dx \quad \text{II}$$

$$\int_a^{a+1} (f(x) - h(x)) dx \quad \text{I}$$



8. ישר ששיפועו -2 חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B, ואת החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A. הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון. הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y . הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט. נסמן את אורך הקטע OE ב- p . נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.
 א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB.
 ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח 7"
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

פתרון מועד מיוחד - 2023 - 581 (גרסה ג)

1. א. $AB = 1.6x$, ב. 9 קמ"ש ג. 11:00, 12:16

2. א. הוכחה, ההפרש הוא d. ב. הוכחה ג. (1) $n=33$ (2) 440

3. א. $p = 0.65$, ב. $\frac{39}{59}$ ג. 0.18715 ד. $1 - \left(\left(\frac{39}{80}\right)^n + \left(\frac{41}{80}\right)^n\right)$

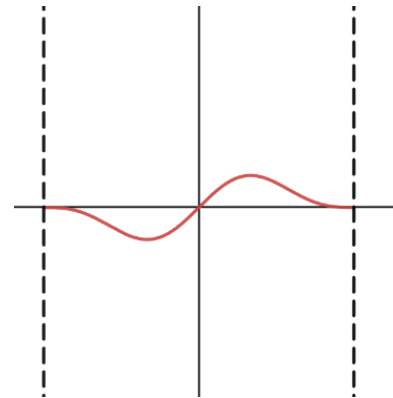
4. א. הוכחה ב. 45° (1) (2) הוכחה ג. הוכחה

5. א. $AB = 2R \sin \alpha$, $BD = \sqrt{3}R$ ב. $\alpha = 40.20^\circ$ ג. $R=15.396$

6. א. (1) אי זוגית (2) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0,0)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (3) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{6}, 0.324\right)$ מקסימום, $\left(-\frac{\pi}{6}, -0.324\right)$

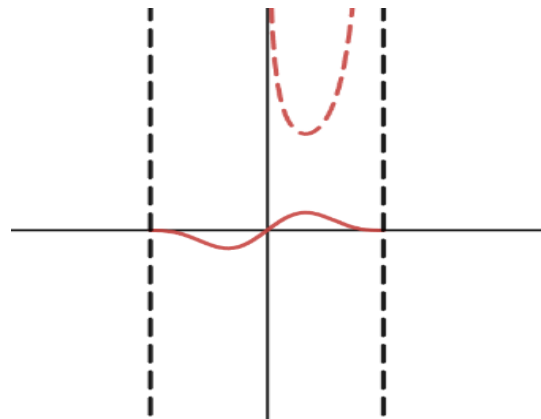
מינימום, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ מקסימום

(4)



ב. (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, (2) $\left(\frac{\pi}{6}, 1.756\right)$ מינימום

(3)



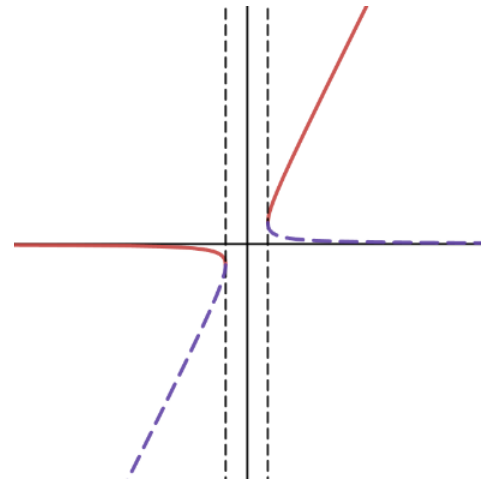
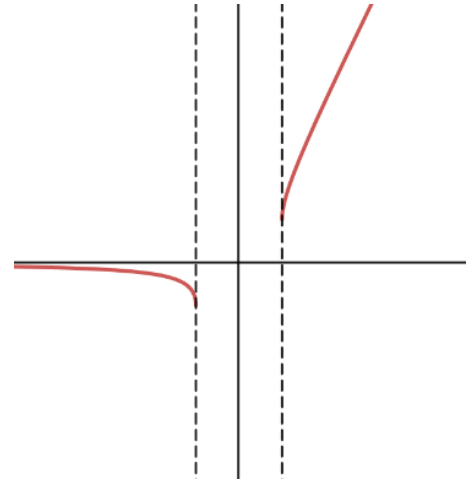
ג. 1.432

7. א. $x \geq 3$ או $x \leq -3$, אין (3) עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < -3$ (4) קעירות כלפי מטה: $x > 3$ או

$x < -3$, קעירות כלפי מעלה: אין.

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
 $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 $\phi = \frac{a}{b} = 1.618033...$
 $\omega = 2\pi f$
 $y = \frac{b}{c} \cos x$
 $\log_a b^c = b \cdot \log_a a^c$
 $S = \int_a^b f(x) dx$
 $\omega = n \cdot \frac{2\pi}{s}$
 $\log_a a^b = b \cdot \log_a a$
 $a^2 - b^2$
 $a^2 = 1, a^4 = a^4, a^8 = a^8$
 \vec{u}
 \vec{v}
 \vec{w}
 \vec{x}
 \vec{y}
 \vec{z}
 \vec{a}
 \vec{b}
 \vec{c}
 \vec{d}
 \vec{e}
 \vec{f}
 \vec{g}
 \vec{h}
 \vec{i}
 \vec{j}
 \vec{k}
 \vec{l}
 \vec{m}
 \vec{n}
 \vec{o}
 \vec{p}
 \vec{q}
 \vec{r}
 \vec{s}
 \vec{t}
 \vec{u}
 \vec{v}
 \vec{w}
 \vec{x}
 \vec{y}
 \vec{z}



$III < I < II$ ד.

8. א. $y = -2x + 1 + 2p$, ב. $p = \frac{1}{2}$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

5 יח"ל - 581 - 2023 - מועד קיץ

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. שני רוכבי אופניים, רוכב א' ורוכב ב', יצאו משני מקומות, A ו-B, בהתאמה, ורכבו זה לקראת זה. המרחק בין המקומות A ו-B הוא $3d$ ק"מ (d הוא פרמטר חיובי).
רוכב ב' יצא לדרך 2.5 שעות אחרי שרוכב א' יצא לדרך.
בשעה 18:30 התברר שכל אחד מן הרוכבים עבר שליש מן המרחק בין המקומות A ו-B.
המהירות של כל אחד מן הרוכבים הייתה קבועה.
למוחרת שוב יצאו הרוכבים מאותם המקומות, A ו-B, ורכבו זה לקראת זה.
כל אחד מן הרוכבים רכב באותה המהירות שבה רכב ביום הראשון. הפעם הם יצאו באותו הזמן ונפגשו כעבור 9 שעות.
- א. (1) באיזו שעה ביום הראשון יצא רוכב א' ממקום A?
(2) הביעו באמצעות d את המהירות של כל אחד מן הרוכבים.
- הזמן שנדרש לרוכב א' לעבור קילומטר אחד גדול ב-1.5 דקות מן הזמן שנדרש לרוכב ב' לעבור קילומטר אחד.
- ב. מצאו את המרחק בין A ל-B.

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות, A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0.

האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A .

האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת חדשה, שאיבריה הם:

$$\dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \dots$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1 , c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

$$\text{נתון כי } c_2 \text{ שווה ל-} -c_1, \text{ ומתקיים גם: } \frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24}.$$

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1 ,

$$\text{ומתקיים גם: } \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

ד. מצאו את הערך של q_B .

3. במכללה גדולה, הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצוהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים.

בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'.

על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'. עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.

ב. חשבו את הערך של p .

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:

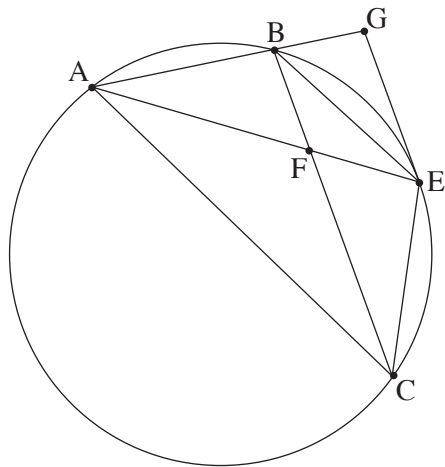
I. המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב' II. המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.

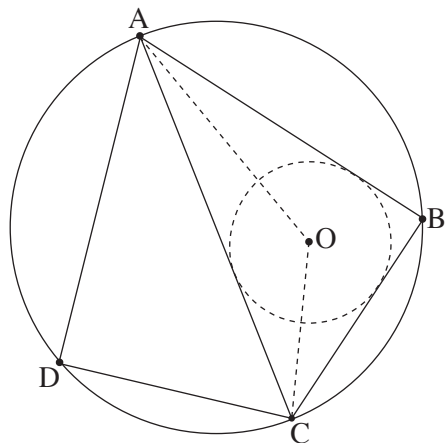
ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'.

מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



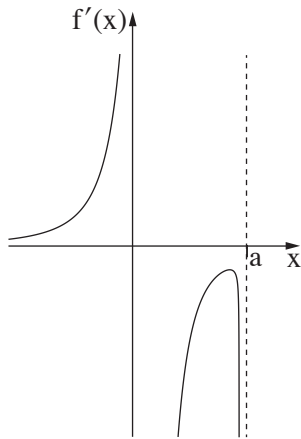
4. הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל.
 נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.
 בנקודה E מעבירים משיק למעגל.
 המשיק חותך את המשיך המיתר AB בנקודה G.
 המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.
 א. הוכיחו: $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.
 נתון: $AG = 18$, $AE = 9\sqrt{6}$.
 ב. חשבו את אורך המיתר AC.
 ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.
 נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.
 ד. חשבו את אורך המיתר AB.
 ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.



5. דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.
 המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.
 הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).
 נסמן: $\angle CAB = \alpha$.
 א. (1) מצאו את זווית המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).
 (2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו-R.
 נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.
 ב. מצאו את גודל הזווית α .
 נתון כי שטח הדלתון הוא $16\sqrt{3}$.
 ג. מצאו את R.
 ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החסום את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.
- א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
- (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.
 - (2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית.
 - (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.
 - (4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.
 - (5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה (U) ואת תחום הקעירות כלפי מטה (\cap) של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה גם הפונקצייה $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי.
- הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.
- ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.
- ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(3, -8)$.
- ד. מצאו את הערכים של a ו- b .
- נתונה גם הפונקצייה $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום $1 < x$.
- ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.



7. נתונה הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \neq 0, x \leq a$. הוא פרמטר חיובי. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x < a, x \neq 0$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $x = 0, x = a, y = 0$. בתחום $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה. הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה $f(x)$. $f(a) = 0$.

א. (1) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטוט סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת-סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים IV-I שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

$$\text{I. } \frac{\sqrt{a-x}}{x^2} \quad \text{II. } \frac{\sqrt{x-a}}{x^2} \quad \text{III. } \frac{\sqrt{a-x}}{x} \quad \text{IV. } \frac{\sqrt{x-a}}{x}$$

ג. איזה מן הביטויים IV-I מייצג את הפונקצייה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -2$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$.

8. נתון מעוין ABCD. נקודה E היא אמצע הצלע BC.

נסמן: $\angle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 25.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ביח"ל
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גארד

פתרון מועד קיץ - 2023 - 581

1. א. (1) בשעה 11:00. (2) מהירות רוכב א' היא $\frac{2d}{15}$, מהירות רוכב ב' היא $\frac{d}{5}$. ב. 300 ק"מ.

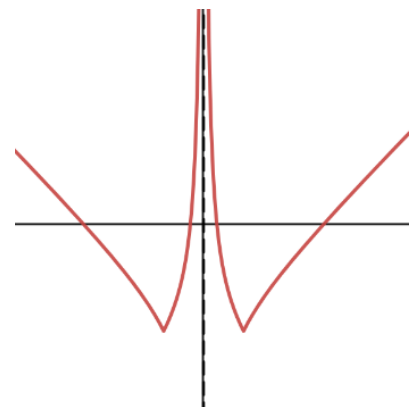
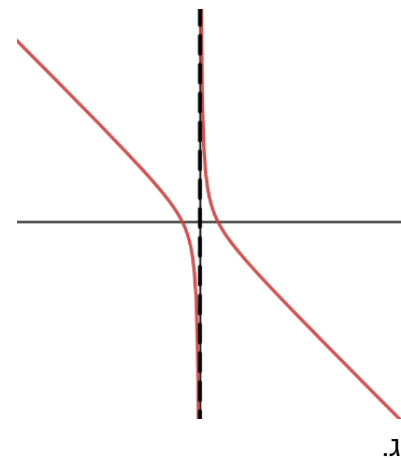
2. א. $\frac{q_A}{q_B}$ ב. (1) לא נכון (2) נכון, ג. $C_1 = -\frac{1}{8}$, ד. $q_B = \frac{1}{4}$.

3. א. 0.8 ב. $\frac{5}{12}$ ג. $\frac{3}{4}$ ד. $0.256 = \frac{32}{125}$

4. א. הוכחה, ב. $27=AC$ ג. הוכחה ד. $12=AB$ ה. $\frac{4}{9}$

5. א. (1) $-\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, 45° , 135° (2) $AO = 2\sqrt{2}R \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$ ב. $\alpha = 30^\circ$ ג. $4=R$ ד. 2.07

6. א. (1) $x=0$ (2) הוכחה (3) $(\sqrt{2}a, 0)$, $(-\sqrt{2}a, 0)$ (4) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x > 0$ או $x < 0$ (5) תחומי קעירות כלפי מעלה: $x > 0$, תחומי קעירות כלפי מטה: $x < 0$.
ב.



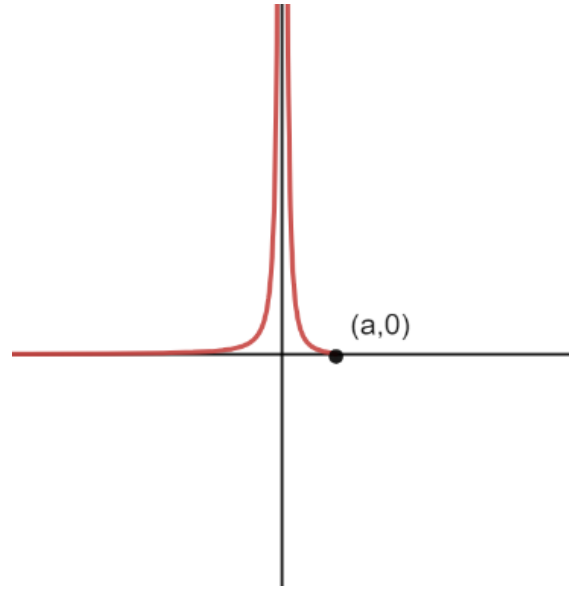
ד. $a=4.5$ $b=8$. ה. נקודת מינימום

7. א. (1) תחומי עלייה: $x < 0$, תחומי ירידה: $0 < x < a$ (2) נקודה אחת

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח 5" - ס. גאורד

ב.



ג. ביטוי $a=2$ ה. $\frac{5}{24}$

8. א. $\frac{10}{\sqrt{\sin x}}$ ב. $5\sqrt{3} = 8.66$

© כל הזכויות שמורות לגיא קורן, אין להפיץ או להעתיק תרגילים או חלק מהם ללא אישור מגיא קורן

5 יח"ל - 581 - 2023 - מועד חורף

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

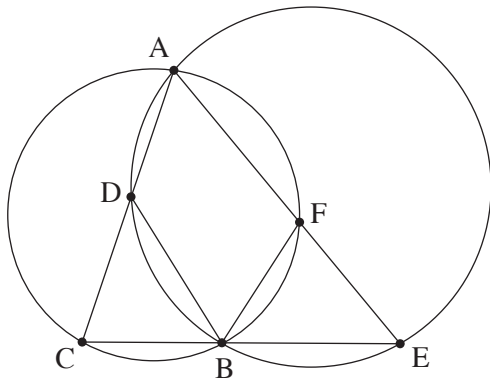
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

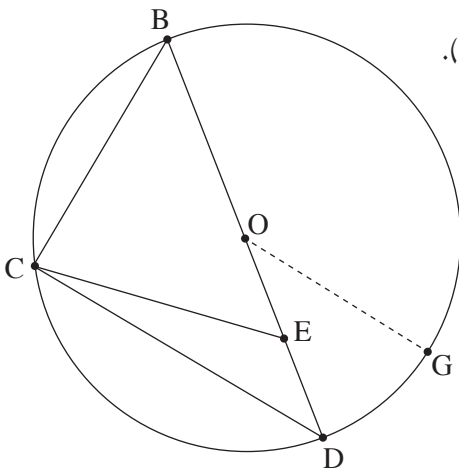
1. לאורך גדת נהר יש שלוש תחנות: תחנה A, תחנה B ותחנה C שנמצאת בנקודה מסוימת בין תחנה A ובין תחנה B. הנהר זורם מכיוון תחנה A לכיוון תחנה B במהירות קבועה. שתי סירות, סירה I וסירה II, יצאו בשעה 8:00 מנקודה C ושטו לכיוונים הפוכים: סירה I שטה (נגד הזרם) אל תחנה A, וסירה II שטה (עם הזרם) אל תחנה B. מייד לאחר שכל אחת מן הסירות הגיעה לתחנה המתאימה, היא הסתובבה ושטה בכיוון ההפוך. נתון כי המהירות של כל אחת מן הסירות במים עומדים היא קבועה. המהירות של סירה I כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 1.5 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם. המהירות של סירה II כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 4 ממהירותה של **סירה I** כאשר היא שטה נגד הזרם. נסמן ב- x את מהירות הזרם בנהר.
- א. הביעו באמצעות x את המהירות של סירה I במים עומדים ואת המהירות של סירה II במים עומדים.
- סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 3 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B. סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A.
- ב. (1) באיזו שעה נפגשו הסירות?
(2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C? נמקו את תשובתכם.
- הסירות נפגשו במרחק של 84 ק"מ מתחנה C.
- ג. מהי מהירות הזרם בנהר?

2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .
 בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.
- א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.
 ב. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.
 (1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.
 (2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.
3. נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.
- א. מצאו את q .
- ד. נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$. מצאו את n .
3. בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.
 בארגז א' יש a פירות: 3 תפוחים והשאר אגסים.
 בארגז ב' יש b פירות: 5 תפוחים והשאר אגסים.
 מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח – מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס – מחזירים אותו לארגז א'.
 לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.
- א. הביעו באמצעות a ו- b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.
 נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.
 ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.
- ב. מצאו את a ואת b .
 ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.
 מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.
- ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח או שבכל 6 הפעמים יצא אגס.
 ה. ידוע שב-4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר זה.

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).
 המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.
 המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.
 הקטע CE עובר דרך הנקודה B.
 א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.
 נתון: $DC = FE$.
 ב. הוכיחו כי $\triangle BFE \cong \triangle BCD$.
 ג. הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$ (1).
 הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE. (2).
 ד. הוכיחו כי $\angle DEC = \angle FCE$.



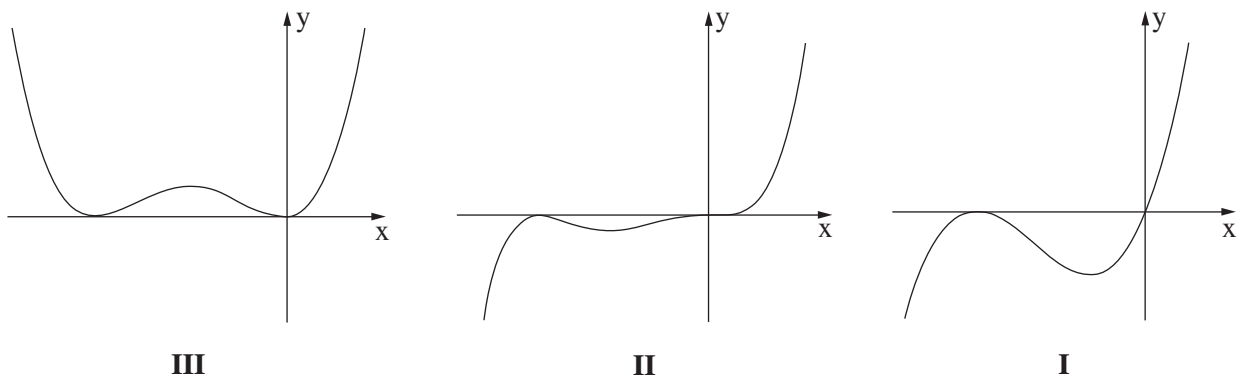
5. משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
 הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).
 נסמן: $CD = m$, $\angle CDB = \alpha$.
 א. הביעו את $\cos \alpha$ באמצעות m ו-R.
 ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2 + R^2}$.
 נתון: $BC = EC$.
 ג. חשבו את α .
 מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.
 ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (x + 1)^2$, $n > 1$ הוא מספר טבעי. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

- א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.
- ג. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I–III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי.



ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = a \cdot f(x - 2)$, a הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $g(x)$ ובין ציר ה- x .

ה. הביעו באמצעות a ו- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו את תשובתכם.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^2(x) - 1}$ בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .
 (3) האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.
 ב. ענו על התת-סעיפים (1)–(2) שלפניכם בעבור התחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$).
 ד. הוכיחו כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
 ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x , בתחום $1.7 \leq x \leq 2$.

8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

- ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.
 א. מביין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.
 ענו על סעיפים ב–ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.
 ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.
 נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.
 נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x = t$, $-1 < t < 1$.
 מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה, כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .
 ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

בהצלחה!

לימוד מתמטיקה ופיזיקה לחטיבה, תיכון והכנה לבגרות - התמחות ב"יח 7"
"תמציתה של מתמטיקה היא לא לסבך דברים פשוטים, כי אם לפשט דברים מסובכים" - ס. גאורד

פתרון חורף- 2023 -16.1.2023 (גרסה א)

1. א. סירה I - $5x$, סירה II - $15x$, ב. $(1, 20:00)$, ב. (2) בין B ל-C, ג. 2 קמ"ש.

2. א. הוכחה, ב. (1) נכון, (2) לא נכון, ג. $\frac{2}{3}$, ד. 7.

3. א. $\frac{18}{a(b+1)}$, ב. $a = 10, b = 12$, ג. $\frac{7}{13}$, ד. 0.1726, ה. $\frac{1}{5}$.

4. א. הוכחה, ב. הוכחה, ג. (1) הוכחה, (2) הוכחה, ד. הוכחה.

5. א. $\frac{m}{2R}$, ב. הוכחה, ג. 37.76° , ד. 115.84° .

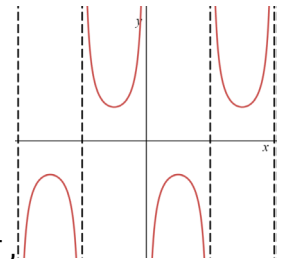
6. א. $(0,0), (-1,0)$, ב. n אי זוגי - חיוביות: $x > 0$, שליליות: $-1 < x < 0$ או $x < -1$.
 n זוגי - חיוביות: $x > 0$ או $-1 < x < 0$ או $x < -1$, שליליות: אין.

ג. n אי זוגי - $X_{min} = -2, X_{max} = \frac{-n}{n+2}$, n זוגי - $X_{min} = \frac{-n}{n+2}, X_{max} = -1, X_{min} = 0$

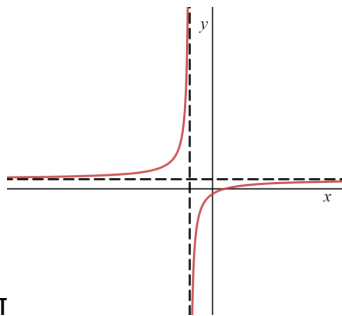
ד. n אי זוגי - גרף II, n זוגי - גרף III, ה. $\frac{T}{a}$.

7. א. $(1) \pi < x < 2\pi$ או $0 < x < \pi$ או $0 < x < \pi$ או $-\pi < x < 0$ או $-2\pi < x < -\pi$, $(2) x = 0, x = \pi, x = -\pi$,

$x = 2\pi, x = -2\pi$, (3) אי זוגי, ב. אין חיתוך עם הצירים, $max(-2, \frac{3\pi}{2}), min(2, \frac{3\pi}{2})$



ג. ד. הוכחה, ה. 0.182.



ט. $\sqrt{3} - 2$

8. א. $g(x)$, ב. $(1) y = 1, x = -2$, $(2) (1, 0), (0, -\frac{1}{2})$, ג.